UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

Escuela de Doctorado – Doctorado en Educación

ESTUDIO DE LA ENSEÑANZA Y DEL APRENDIZAJE DE LAS ISOMETRÍAS MEDIANTE DISCUSIONES EN GRAN GRUPO CON EL USO DE LA TECNOLOGÍA EN FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Tesis doctoral

Autora: Marta Martín Nieto

Directora de tesis: Dra. Natalia Ruiz López

Marzo de 2021

Agradecimientos

Debo agradecer de manera especial y sincera a mi directora de tesis, Dra. Natalia Ruiz López por aceptarme para realizar este estudio bajo su dirección. Su dedicación, apoyo y confianza en mi trabajo y sus constantes ánimos han sido de un aporte invaluable para llegar al final de este camino.

Al CES Don Bosco por poner los medios suficientes para llevar a cabo todas las actividades propuestas durante el desarrollo de esta tesis. A los alumnos de 4º de Educación Primaria de dos cursos sucesivos (desde 2018 a 2020) que han participado en esta investigación. En especial, a 4º Primaria A Bilingüe 2019-2020 que cedieron sus datos para la grabación de vídeo y son los protagonistas de este estudio. A mis compañeros del Centro, en particular a Lola y a María José que me animaron desde el primer día, a José Antonio que me sirvió de primer referente en investigación educativa y al grupo de investigación PENLAB (Antonio, Goyo, David y Juan Carlos) por su apoyo constante y por acompañarme en congresos y actividades de difusión.

Agradezco su presencia y apoyo a todos los amigos que han estado a mi lado durante este proceso. Marta Pérez se merece una mención especial por "mentorizarme" en los temas burocráticos de la Universidad y en la gestión bibliográfica.

Pero sobre todo agradezco de manera muy especial a mi familia, destacando a mis padres que desde siempre se han preocupado por darme los medios para cursar estudios universitarios y me lo han puesto muy fácil. Siempre están a mi lado, incondicionalmente. Es importante mencionar también a mi hermana que, junto con mis padres, es la persona que más se alegra por mis logros.

A mi abuela.

Contenido

Capítulo 1. Introducción

Esta tesis se ubica en el área de Didáctica de las Matemáticas y se ha realizado dentro del Programa de Doctorado en Educación de la Universidad Autónoma de Madrid. Surge tras tres años de experiencia como docente en el Grado de Magisterio de Primaria en los que me he encontrado con el reto de acercar las matemáticas a este alumnado y buscar la manera de generar interés y vencer los miedos o creencias negativas que en muchas ocasiones les provoca esta materia. En este tiempo, he detectado problemas que pueden ser el origen de que algunos alumnos no consigan desarrollar las competencias necesarias para ejercer su labor docente en el futuro. Por ello, junto a mi directora de tesis, hemos planteado esta investigación cuya motivación principal es encontrar maneras de favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje para que los alumnos adquieran las competencias matemáticas y didácticas para desarrollar su labor docente.

Mi primer contacto con el Software de Geometría Dinámica GeoGebra fue en el Máster de Formación del Profesorado que cursé en la Universidad Autónoma de Madrid. Desde que empecé mi labor como docente universitaria lo he incorporado en mis clases de geometría, en particular en unidades con contenidos relacionados con movimientos rígidos en el plano. Pronto fui consciente de que, para que las sesiones con esta herramienta fueran realmente productivas desde un punto de vista matemático y didáctico, es necesaria una planificación previa de la acción docente. Por otro lado, muchas veces resulta difícil que los alumnos manifiesten en voz alta sus intuiciones y deducciones en los procesos de resolución de problemas, mientras que yo siempre he deseado poder discutir matemáticamente en clase en relación a los problemas de geometría. Por este motivo sospeché que sería más apropiado generar discusiones en gran grupo bajo el soporte de actividades ya resueltas por los propios alumnos y podrían generar cuantiosas oportunidades de aprendizaje. Sin embargo, no hay muchas investigaciones que se hayan centrado en el estudio conjunto de las perspectivas discursiva e instrumental.

Diversas publicaciones plantean la potencialidad de las discusiones en gran grupo sobre la resolución de problemas matemáticos y muestran ejemplos de puestas en común que favorecen el aprendizaje de los alumnos (Cobo, 1998; Molina, 2016; Planas y Boukafri, 2019, Gómez, González Astudillo y Marques Portugal, 2018; Braga, Verdeja y Adelina, 2018). Algunos autores han analizado cómo debe ser la estructura de la discusión para que resulte efectiva desde el punto de vista del aprendizaje (Smith y Stein, 2018).

Por otro lado, hay investigaciones que se centran en el uso del Software de Geometría como recurso didáctico (Amaral y Cabrita, 2017; Cruz y Mantica, 2017; Iglesias y Ortiz, 2018; Ruiz, 2012). Ciertos estudios sobre la formación inicial de maestros sugieren la necesidad de usar entornos interactivos de geometría dinámica para analizar la invariancia como propiedad de las transformaciones geométricas (Sámuel, Vanegas, y Giménez, 2018). Son varios los autores que afirman que es necesaria una justificación de las construcciones realizadas con GeoGebra para asegurarnos de un avance matemático (Giacomone, Godino, Wihelmi y Blanco, 2018; Iglesias y Ortiz, 2018).

Además, hay ciertas investigaciones educativas sobre la orquestación del profesor en situaciones de clase que involucren el uso de la tecnología (Trouche 2004; Drijvers, Doorman, Boon, Reed y Gravemeijer, 2010). En estas investigaciones se destaca la importancia de una buena anticipación para la gestión adecuada de los diferentes elementos partícipes en cada situación del aula.

Para que las discusiones en gran grupo con tecnología resulten efectivas es imprescindible que el alumno realice progresos fruto del aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje surgidas en el aula. Por este motivo, una parte esencial de esta investigación se centra en el estudio de las oportunidades de aprendizaje que puedan surgir en la situación de enseñanza, así como el aprovechamiento de éstas por parte de los alumnos. Un supuesto básico de este trabajo es considerar el aprovechamiento de una oportunidad de aprendizaje como una evidencia de aprendizaje.

La pregunta que nos hacemos en esta investigación es: *¿Cómo se pueden potenciar las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje de las isometrías en futuros maestros de primaria, mediante la orquestación de discusiones en gran grupo con el uso de la tecnología?* Pretendemos responder por medio de la consecución de los dos objetivos siguientes:

1. Analizar una sistemática de planificación, implementación y evaluación de una secuencia didáctica con discusiones en gran grupo bajo el soporte de GeoGebra.
2. Detectar oportunidades de aprendizaje de las isometrías y de contenidos didácticos específicos, así como su aprovechamiento en el contexto de la secuencia didáctica creada a partir de la sistemática anterior.

El trabajo de campo se ha llevado a cabo en el Centro de Estudios Superiores Don Bosco (adscrito a la Universidad Complutense de Madrid). Los participantes son estudiantes del 4º curso de Grado de Magisterio de Educación Primaria. La investigación tiene lugar en el contexto de la asignatura Matemáticas y su Didáctica III. La profesora es a su vez la investigadora principal. La metodología es cualitativa y se encuentra dentro del paradigma "investigación de diseño" ("design research"). Así, hemos planificado secuencias formativas que implican el diseño de tareas, su implementación y un análisis retrospectivo de la experiencia. Tras cada una de las implementaciones, hemos realizado un proceso de reflexión que ha permitido re-adaptar el proceso inicial.

La presente memoria de tesis está estructurada en ocho capítulos. El primero es el presente capítulo de introducción. El *Capítulo 2, marco teórico*, nos sirve para revisar la literatura relacionada con el tema de investigación. Está estructurado en cinco apartados que recogen aspectos relativos a los núcleos de interés en nuestra investigación: el papel de la interacción social, GeoGebra como recurso de aprendizaje, estudios conjuntos desde la perspectiva discusiva y la instrumental, el concepto de oportunidad de aprendizaje y el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Empezamos el estudio empírico en el *Capítulo 3, metodología de investigación*, donde veremos el planteamiento del problema de investigación y el diseño de la investigación. La metodología es cualitativa, esencialmente se trata de una investigación de diseño “design research” aplicada al análisis de datos de clase, que se explica con detalle en el apartado 3.2. La secuencia didáctica está formada por cuatro problemas en los que están involucrados los conceptos de traslación, giro y simetría.

En el *capítulo 4, diseño y realización del proceso formativo*, detallamos cómo se llevó a cabo el diseño del experimento. El proceso de enseñanza-aprendizaje se impartió al grupo participante durante el curso 2019-2020, en la asignatura Matemáticas y su Didáctica III del grado de Magisterio en Educación Primaria. Para ello se habla de la guía docente de la asignatura, del cronograma del curso y del horario del grupo. Detallamos aquí los resultados y conclusiones obtenidas del desarrollo de dos talleres piloto que sirvieron como punto de partida para el diseño de la sistemática.

En *el capítulo 5, análisis de la aplicación de la sistemática,* exponemos la síntesis de los procesos de diseño e implementación y aplicamos el instrumento TRU-Math de Schoenfeld (2013) que consiste un sistema de rúbricas que permite analizar desde un punto de vista general si la implementación de la secuencia ha sido efectiva.

El *capítulo 6, análisis de las oportunidades de aprendizaje,* se estructura en dos bloques: Aplicación del instrumento “detector de oportunidades de aprendizaje” y análisis del proceso matemático. En la primera parte realizamos un estudio exhaustivo de la puesta en común del problema 2 y un análisis integrado de cada uno de los problemas, siguiendo los pasos marcados por el instrumento ‘Detector de oportunidades de aprendizaje’ (Morera, Planas y Fortuny, 2013). Dividimos la discusión en gran grupo de cada uno de los problemas en estadios, interpretamos las intervenciones de los participantes, detectamos oportunidades de aprendizaje y clasificamos los episodios. En la segunda observamos el progreso matemático utilizando las técnicas de evaluación propuestas en la guía docente de la asignatura.

En el *capítulo 7, resultados,* se exponen resultados relativos a una encuesta realizada a los participantes, a la evaluación de la sistemática, a las oportunidades de aprendizaje y a su aprovechamiento. En el *capítulo 8, conclusiones*, se retoman los resultados obtenidos para discutirlos a la luz de las teorías que nos han servido de fundamentación. Esto permite contestar a los interrogantes planteados al inicio de la investigación y proponer futuras líneas de profundización y mejora. Además, se describen aspectos que no hemos podido responder y puntos que quedan por estudiar.

En el Anexo I se adjunta el documento que firmaron todos los alumnos participantes en la investigación de cesión de datos para la grabación de vídeo. En el Anexo II se recogen los análisis en profundidad de la puesta en común de los problemas 1, 3 y 4.

Capítulo 2. Marco teórico

En este capítulo desarrollamos el marco teórico que constituye la base de nuestra investigación. Es necesario partir de estudios sobre el papel de las interacciones sociales y de la tecnología en la adquisición de competencias geométricas. En concreto, en la formación de profesores.

Además, resulta fundamental establecer cuándo consideramos que una secuencia didáctica es productiva desde el punto de vista matemático y didáctico. Muchos estudios han analizado las dificultades y obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas. Nosotros, analizaremos las oportunidades de aprendizaje matemático y el aprovechamiento de estas. Por ello es imprescindible definir qué entendemos por 'oportunidades de aprendizaje'.

Los participantes de nuestro estudio son estudiantes del Grado de Magisterio de Educación Primaria. Así, es esencial hacer una revisión sobre el conocimiento especializado que se espera de ellos, en particular como docentes que tendrán la posibilidad de impartir matemáticas.

2.1. Papel de la interacción social en el aprendizaje de la geometría.

Son muchas las investigaciones sobre el papel de la interacción social en el aprendizaje, en particular en la asignatura de matemáticas (Cobo, 1998; Molina, 2016; Planas y Boukafri, 2019). La mayoría coincide en que el trabajo colaborativo entre alumnos es crucial (tanto el trabajo por parejas como las discusiones en gran grupo para llegar a construir el conocimiento). Algunas han identificado las condiciones para producir una interacción efectiva. Un rasgo común de estas condiciones es que los alumnos trabajen conjuntamente con autonomía respecto a la interacción del profesor. Además, destaca la importancia de entender el trabajo colaborativo como la unión de esfuerzos de diferentes estudiantes con el objetivo de trabajar sobre la misma actividad, en lugar del trabajo individual sobre una sub-tarea de la actividad que tiene que realizar el grupo. (Morera, 2013).

Vygotsky (1977) planteó un modelo de aprendizaje sociocultural; entendiendo el aprendizaje como un factor del desarrollo. Considera la adquisición del aprendizaje una forma de socialización, ya que concibe al hombre como una construcción más social que biológica. La atención, la memoria, la formulación de conceptos se desarrollan en el ámbito social, luego el individuo interioriza hasta hacerlo propio. Al planificar las clases, se debe tener en cuenta la importancia de las interacciones entre los estudiantes, como compañeros, con el profesor y con el grupo.

El Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática (GIPEAM), con sede en la Universitat Autònoma de Barcelona, afirma que el análisis de interacciones en clase puede utilizarse para detectar obstáculos e interrupciones, pero también oportunidades de aprendizaje y continuidades en la participación (Planas y Boukafri, 2019). La tradición de experimentos de enseñanza bajo las teorías sociales avala que es posible modificar la cultura del aula de matemáticas y desarmar la paradoja de la irrelevancia de los modos de hablar y de hacer del alumno en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas. No obstante, la matemática escolar se construye en la actividad cotidiana del aula. La posibilidad de generar culturas del aula de matemáticas que den valor pedagógico y didáctico a la manera de expresarse del alumno existe y, con ello, la posibilidad de producir oportunidades de aprender interpretaciones más significativas y menos ritualizadas.

Según Planas y Boukafri (2019) existe una única norma base en torno a la participación en el aula de matemáticas que “si se pudiera escribir” diría que el alumno debe expresarse como lo haría el profesor de matemáticas, anticipando lo que el profesor diría. El aprendizaje se piensa como un discurso lineal que va de la lengua de uso del alumno hacia el lenguaje de las matemáticas que utilizaría un profesor de matemáticas en clase. Esta concepción persiste mediante discursos de idealización pedagógica de una lengua única de las matemáticas (Planas, Morgan y Schütte 2018). El alumno se encuentra ante la paradoja de tener que aprender a tomar distancia de su propio discurso, en favor de hablar y hacer matemáticas representadas por el discurso del profesor de matemáticas. Sin embargo, no parece haber una razón pedagógica en la diferenciación excluyente entre lenguas en uso del alumno y del profesor. La paradoja de la irrelevancia de los modos de hablar y de hacer del alumno es el resultado de una construcción social, cultural y política. En el marco global de lenguas y culturas oficiales (Planas, 2018), no es políticamente inocente la pretensión de comprender la enseñanza y el aprendizaje dando un valor marginal al discurso del alumno.

Según Fernández-Bravo (2019) existen cuatro etapas fundamentales en el acto didáctico: comprensión, enunciación, memorización y aplicación. En la primera etapa, el profesor, respetando el vocabulario empleado por el alumno, creará desafíos a partir de las ideas observadas por el alumno. Las respuestas ya sean correctas o incorrectas, se forman a través de un diálogo entre todos y un diálogo interior, y deben ser recogidas, como hipótesis desde la motivación de comprobarlas por sus propios medios para establecer conclusiones válidas. Llegados a este punto, se hace necesario enunciar o simbolizar lo que ha comprendido respecto a la nomenclatura o simbología convencionales.

El que enseña debe preocuparse de escuchar al que aprende que se expresará con el vocabulario que disponga. Que las respuestas que obtenemos no coincidan con las que esperamos implica, simplemente, discrepancia entre la enseñanza y el aprendizaje y no significa, en modo alguno, que no haya razonamiento.

En relación con la comunicación en el aula entre el grupo y el profesor, algunas investigaciones que muestran la potencialidad de las discusiones en gran grupo. González Astudillo y Marques Portugal (2018) analizan la discusión en gran grupo posterior a la resolución de tareas relacionadas con fracciones en quinto de Educación Primaria y comprueban que la comunicación dialógica contribuye a crear oportunidades de aprendizaje en el aula. Para ello, son esenciales tanto el conocimiento del profesor sobre la materia, como sobre enseñanza del concepto y su experiencia previa. Por otra parte, Braga, Verdeja y Adelina (2018) realizan una investigación en la que participan varias facultades de formación de profesorado, combinan el trabajo en pequeños grupos con dinámicas en gran grupo. Los alumnos manifiestan que la puesta en común permite conocer y revisar el trabajo propio aprendiendo de los otros, así como compartir los conocimientos. En algunos casos manifiestan que les sirve para ganar seguridad en lo que estaban diseñando y, en otros, para rectificar o reenfocar determinadas cuestiones.

Veamos a continuación las fases en las que estructuramos el diálogo en discusiones en gran grupo.

2.1.1. Fases de las discusiones en gran grupo

Según Smith y Stein (2018) las cinco fases de discusiones en gran grupo efectivas son:

1. Anticipación: no es solamente analizar si las actividades tienen el nivel correcto de dificultad o de interés para los alumnos, lo cual va más allá de pensar simplemente en si encontrarán la respuesta correcta. Consiste en hacer un estudio previo sobre cómo los alumnos abordarán el problema planteado. Anticipar posibles respuestas, incluye pensar cómo pueden interpretar el problema y tener un amplio estudio de posibles respuestas, tanto correctas como incorrectas. Además, el profesor debe pensar cómo las posibles respuestas se relacionan con los objetivos de aprendizaje.
2. Monitorización: es más que observar y escuchar a los estudiantes mientras utilizan sus propias estrategias en el trabajo de resolución de un problema. Durante esta fase, el profesor debe hacer preguntas para conseguir centrar la atención en ciertos aspectos del problema, para ayudar a clarificar ideas y para cerciorarse de que todos los participantes del grupo están implicados en la resolución.
3. Selección: después de haber monitorizado a los estudiantes y habiendo obtenido las estrategias generadas, el profesor puede seleccionar

estudiantes para que compartan su trabajo con el resto del grupo, y así tener control sobre la discusión.

4. Secuenciación: el profesor, cuando ha seleccionado a los alumnos que compartirán el trabajo con el resto del grupo, escogerá el orden en el que estas presentaciones ocurran. Determinados órdenes pueden maximizar las oportunidades de conseguir los propósitos matemáticos de la discusión.
5. Conexión: se basa en la importancia, por parte del profesor, de ayudar a los alumnos a conectar sus soluciones con las de los compañeros. No buscamos mostrar diferentes presentaciones de cómo resolver un problema, el objetivo es tener discusiones matemáticas centradas en el desarrollo sucesivo de potentes ideas matemáticas.

2.2. Software de Geometría Dinámica como recurso didáctico.

Además de las discusiones en gran grupo, en nuestra investigación juega un papel fundamental el uso de la tecnología. Desde mediados de la década de los años ochenta, se ha venido incorporando el uso de los llamados Software de Geometría Dinámica (SGD) en las clases de matemáticas. Entre los más destacados, se encuentran Cabri, Geometer's Sketchpad y GeoGebra. Este tipo de software permite construir y modificar dinámicamente figuras geométricas euclídeas. Las propiedades geométricas y las relaciones entre objetos usados en una construcción se mantienen al manipular un objeto y además se modifican los objetos dependientes en consecuencia. Esto favorece el descubrimiento de relaciones entre los objetos (iniciales, auxiliares y finales) que conforman una construcción geométrica.

En nuestro caso, hemos empleado GeoGebra que además puede considerarse un Software de Matemática Dinámica porque incluye otras peculiaridades algebraicas y de cálculo. La idea básica de los creadores y desarrolladores de este software fue facilitar la realización por parte de los estudiantes de construcciones y conjeturas de geometría euclídea (Hohenwarter, Kovács y Recio, 2019). Es un software libre (con licencia GPL que permite cualquier uso no comercial) que tiene versiones para iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook y Linux. Ejecuta un archivo Java (geogebra.jar) y almacena cada una de las construcciones en un archivo XML de extensión ggb. Estos archivos se pueden exportar como dibujos, imágenes o páginas web dinámicas llamadas applets.

La elección de GeoGebra se justifica porque las isometrías forman parte del programa y en los últimos años se ha convertido en el software de geometría dinámica (y, cada vez más de matemáticas en general) de mayor aceptación entre el profesorado, por su calidad, versatilidad, carácter abierto y gratuito. Existe una amplísima comunidad de usuarios que está en continuo crecimiento y que comparte experiencias y recursos, organiza jornadas y congresos.

La red International GeoGebra Institute (IGI) tiene como misión la difusión y la enseñanza de GeoGebra, la certificación de nivel de conocimientos adquirido por el usuario y el desarrollo de materiales y, en general el apoyo al profesorado para la utilización de los mismo. En España, existen en la actualidad once institutos pertenecientes a la red: Cantabria, Cataluña, Andalucía, Galicia, Castilla y León, Valencia, Castilla La Mancha, Canarias, País Vasco y dos en Madrid.

Toda esta actividad augura un futuro prometedor en la integración de GeoGebra en las aulas de todo el mundo y, por tanto, es necesario realizar investigaciones que permitan fundamentar prácticas docentes apropiadas.

La singularidad del aprendizaje geométrico en un entorno SGD está determinada por el carácter dinámico de los objetos. En particular, en GeoGebra, la herramienta que representa esencialmente el dinamismo es “Elige y mueve”, herramienta que selecciona objeto y lo arrastra por la pantalla. Por medio del arrastre (dragging en inglés) las propiedades geométricas se mantienen invariantes.

Los SGD han contribuido al desarrollo del sentido geométrico. En concreto, han jugado un papel fundamental en el estudio de las isometrías en el plano, ya que, le brindan a los estudiantes la posibilidad de trabajar con múltiples representaciones de un objeto geométrico, facilitando así su tránsito por niveles más elevados de generalización y abstracción (Amaral y Cabrita, 2017). En numerosas investigaciones, destaca el poco uso de la característica dinámica del software para la validación de las soluciones. Se ha observado que los estudiantes necesitan aprender a mover las figuras (Cruz y Mantica, 2017; Iglesias y Ortiz, 2018; Ruiz, 2012). Algunos estudios sobre la formación inicial de maestros sugieren la necesidad de usar entornos interactivos de geometría dinámica para analizar la invariancia como propiedad de las transformaciones geométricas (Sámuel, Vanegas, y Giménez, 2018).

Giacomone, Godino, Wihelmi y Blanco (2018) afirman que el uso de los procedimientos que permite GeoGebra no requiere poner en juego, de manera explícita, ni las propiedades ni las definiciones de los objetos geométricos. Se requiere la acción del profesor solicitando la justificación explícita de que la secuencia de pasos pone en juego lo conceptos y las propiedades que garantizan la validez de los enunciados. Los planteamientos no deben ser válidos únicamente para el uso de GeoGebra, sino también para el trabajo matemático con representaciones y visualizaciones en general. Es más importante el conocimiento matemático implicado en la construcción de un diagrama que la propia construcción de un diagrama preciso. El conocimiento matemático implicado no está presente si no se exige una justificación. Iglesias y Ortiz (2018) proponen reflexionar sobre la necesidad de propiciar en el aula, con uso de SGD, los intercambios profesor-estudiantes y estudiantes-estudiantes con el propósito de crear un ambiente que incentive los usos heurísticos del software para conjeturar – validar con más provecho para la formación matemática y didáctica de futuros profesores y sus potenciales estudiantes.

2.2.1. La función del profesor (orquestación)

Entendemos por *orquestación* la forma que tiene un profesor de gestionar los elementos singulares de una discusión (en nuestro caso los alumnos, el SGD y la propia profesora) para producir resultados compartidos (Morera, 2013). Todos los elementos de la clase deben interactuar para conseguir una producción común.

Consideramos que el uso de la tecnología en clase y, en particular en las discusiones en gran grupo, es una herramienta potente que puede contribuir a generar oportunidades de aprendizaje. Esta consideración hace que el dominio de la *orquestación instrumental* sea crucial para la investigación.

La teoría de la instrumentalización se desarrolló originalmente en el campo de la ergonomía cognitiva. Ergonomía se refiere al estudio de las condiciones de adaptación de un lugar de trabajo o máquina a las características físicas del trabajador. Por ello, la ergonomía cognitiva se interesa por los procesos metales tales como percepción, memoria, razonamiento y respuesta motora, en la medida que estas afectan a las interacciones con los otros seres humanos o elementos del sistema. Así, el objetivo principal de la teoría de la instrumentalización era explicar cómo se producen procesos de aprendizaje en entornos tecnológicamente complejos (Rabardel y Beguin, 2005).

Según Verillon y Rabardel (1995) un instrumento es cualquier artefacto que un sujeto asocia con la acción necesaria para conseguir realizar una tarea. Es decir, el instrumento es un intermediario entre el sujeto y el objeto. En nuestro caso, el objeto es la secuencia de problemas y el instrumento el SGD. Un artefacto no es instrumento desde el principio, llega a serlo cuando se produce la génesis instrumental y el individuo construye sus propios esquemas personales o se apropia de esquemas sociales (Artigue, 2002). Es decir, el instrumento es mixto: por una parte, artefacto y por otra esquemas cognitivos.

El proceso de *génesis instrumental* se da en dos direcciones. La primera es la fase de *instrumentalizació*n que se dirige hacia el artefacto, se encuentran sus potencialidades y se transforman para usos específicos. La segunda es la *instrumentación* y se dirige hacia el sujeto, quien elabora o se apropia de esquemas cognitivos, llamados esquemas de actividad instrumentada que posteriormente se transformarán en técnicas que le permiten dar respuesta a las tareas planteadas (Vergnaud, 1990; Rabardel, 2001).

El concepto de orquestación instrumental fue inicialmente desarrollado por Trouche (2004) y revisado por Drijvers, Doorman, Boon, Reed y Gravemeijer, (2010). Trouche conceptualiza la orquestación instrumental como la organización intencional y sistemática del profesor y el uso de los artefactos disponibles en un entorno de enseñanza a fin de orientar la génesis instrumental del alumnado. Las dos fases de Trouche se centran en la planificación de la clase por parte del profesor y son las siguientes: *configuración didáctica y modo de explotación.* Drijvers y sus colegas completan la estructura de la orquestación instrumental con una tercera fase: *implementación didáctica.* Definimos las tres fases:

1. Configuración didáctica: Conjunto de instrumentos y objetos orientados a la enseñanza.
2. Modo de explotación: Forma en la que el profesor interpreta una configuración para atender a sus intenciones didácticas.
3. Implementación didáctica: Decisiones que hacen efectivo el diseño instructivo dado por la configuración y el modo de explotación.

En nuestro estudio, aplicamos una mirada conjunta, teniendo un total de ocho fases: las tres anteriores y las cinco fases de las discusiones en gran grupo de Smith y Stein (2018) presentadas en 2.2.1. Así, tenemos una sistemática para preparar y gestionar puestas en común de resolución de problemas con el uso de la tecnología. Según Morera (2013) esto supondría una unión directa de los dos marcos sin intervenir en la estructura de cada fase. Se trata de una unión basada en la suma de prácticas y fases, fijándonos únicamente en el aspecto temporal.

2.3. Aprendizaje de la geometría mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología.

Morera (2013) realiza uno de los pocos estudios que, como el nuestro, está basado conjuntamente en la perspectiva discursiva e instrumental. Busca desarrollar acciones y propuestas prácticas para gestionar discusiones en gran grupo que involucren el uso de la tecnología. Observa algunas pautas de actuación potencialmente interesantes para toda la puesta en común del problema. Divide la puesta en común de un problema en los siguientes estadios:

a) *Situación del problema*: Presentación o recordatorio del enunciado o de los objetivos del problema antes de empezar la discusión para situar a los alumnos en la actividad que realizarán.

b) *Presentación de una solución (argumentada)*: Puede ser algún alumno o grupo de alumnos quienes la presenten, o el profesor, quien presente soluciones reales o ficticias. Puede presentarse una solución correcta, una correcta pero incompleta o incluso una incorrecta.

c) *Estudio de diferentes estrategias para resolver o argumentar*: Prestar atención a las diferentes estrategias de resolución que pueden haber pensado los alumnos. Además, el profesor puede intervenir y plantear estrategias que no hayan pensado.

d) *Estudio de casos particulares o extremos*: Conviene hacer un estudio de estos casos. Cuando el problema no tiene solución o no tiene casos extremos, es importante hacer a los estudiantes conscientes de ello.

e) *Contraste entre diferentes soluciones*: Diferentes soluciones que puede tener un problema por el hecho de tener grados de libertad. No puede confundirse con buscar la misma solución mediante diferentes estrategias de resolución.

f) *Conexiones con otras situaciones*: Son necesarias las conexiones con otros conceptos matemáticos previos o que aún se tienen que introducir. Igualmente, interesantes son las conexiones con otras áreas de conocimiento o con contextos cercanos a los alumnos.

g) *Generalización y conceptualización*: La discusión en gran grupo puede generar un ambiente idóneo para la posible generalización de un resultado encontrado.

h) *Reflexión sobre el progreso matemático*: Balance de la puesta en común que sirve para que los alumnos reflexionen sobre los aspectos matemáticos y didácticos trabajados.

Respecto a la estructura que siguen algunas de las discusiones en gran grupo, detecta que cuando la orquestación se centra en el profesor, los estadios se tratan de manera ordenada; por el contrario, el orden es menor cuando la orquestación está centrada en el estudiante. Observa, además, que si se lleva a cabo una buena anticipación del problema en la cual se muestra que tiene posibilidades de tratar un gran número de estadios, será rico en oportunidades de aprendizaje, si se gestiona adecuadamente. Hay otros factores que pueden influir a la hora de aumentar o disminuir la riqueza de un problema, como la dinámica de participación de los alumnos. Por su parte, la tecnología puede ser un transformador de ejercicios en problemas, con lo cual, puede ayudar a enriquecerlos (Hershkowitz y Schwarz, 1999). Por ejemplo, Camacho y Santos (2004) sugieren trabajar, haciendo uso de alguna herramienta tecnológica, tomando ejercicios típicos de libros de texto y relacionándolos con distintos fenómenos de variación y cambio. Concluyen que puede propiciar que los procesos de resolución resalten el uso de distintas representaciones y sugieran análisis que complementen el desarrollo.

El análisis detallado de las características de las discusiones en gran grupo con tecnología aporta una visión detallada de los elementos que intervienen en la discusión. Lo que ayuda a entender la relación entre enseñanza y aprendizaje y a comprender de qué manera una serie de situaciones contribuyen a facilitar el progreso de los estudiantes.

2.4. Oportunidades de aprendizaje

Para sentar bases en nuestro estudio, necesitamos definir qué consideramos *aprendizaje* ya que esta palabra está en nuestra pregunta de investigación. Según Cobb y Whitenack (1996) el aprendizaje matemático es un proceso de autoorganización conceptual y de enculturación. A la anterior definición, Morera (2013) añade la reorganización de estructuras que no sean conceptuales, tales como procedimentales, de gestión del conocimiento y de la participación en el entorno de enseñanza-aprendizaje. Así, consideramos *oportunidades de aprendizaje* todas las situaciones que se dan en los procesos de resolución, en las que a los alumnos se les presenta la posibilidad de reorganizar sus estructuras conceptuales, procedimentales, o de gestión de conocimiento. Es decir, construir nuevas conexiones o de relacionarlas con el aprendizaje de nuevas formas de proceder en la resolución de los problemas que están trabajando. Se trata de situaciones donde el contraste entre diferentes interpretaciones de la resolución de un problema o de las normas de clase es aprovechado como hilo conductor en la discusión.

La relación entre obstáculos y oportunidades de aprendizaje está presente en la base de algunos experimentos de enseñanza que hacen aflorar interpretaciones diversas de normas sociomatemáticas (Planas y Boukafri, 2019). Sin embargo, los estudios sobre la detección de dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje matemático de los alumnos continúan ocupando gran parte de la actividad investigadora, influyendo en la elección de temas a investigar.

El estudio de las oportunidades de aprendizaje matemático implica el de la construcción de normas del aula de matemáticas. La noción de norma sociomatemática (Yackel y Cobb, 1996) surge al observar que las teorías psicológicas del desarrollo humano no bastan para explicar el aprendizaje matemático en entornos de interacciones de clase. Se focalizan en aspectos normativos de las discusiones sobre temas matemáticos y son las que marcan qué se considera matemáticamente sofisticado, matemáticamente eficiente o matemáticamente elegante. Disponemos de resultados de experimentos donde se relaciona la constitución de normas sociomatemáticas como normas de clase y el aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático (Molina, 2016).

Los procesos de naturalización de culturas del aula de matemáticas relegan sistemáticamente modos de hablar y de hacer y, con ello, reducen la producción y distribución equitativa de oportunidades de aprendizaje debido a que generalmente las normas de clase no son socialmente neutras, sino fruto de la construcción diferenciada de modos de hablar y de hacer matemáticas en la escuela (Planas y Boukafri, 2019). La interpretación de los datos recogidos en discusiones en gran grupo informa del efecto de la participación en la diversidad de interpretaciones para normas específicas. En el seno de este proceso se generan oportunidades de discutir normas de la cultura del aula. La posibilidad de generar culturas del aula de matemáticas que den valor pedagógico y didáctico a las lenguas y las culturas del alumno existe (Fernández-Bravo, 2019), y con ello, la posibilidad de producir oportunidades de aprender significativas y menos ritualizadas por normas sociomatemáticas.

Se considera aprendizaje matemático cuando hay evidencias explícitas del aprovechamiento de alguna oportunidad de aprendizaje matemático. Según este criterio, lo importante es encontrar estudiantes que evidencien cambios en sus producciones (Morera, 2013). Puede ocurrir que las iteraciones sean productivas solo para algunos participantes Kieran (2001). Además, se puede dar el caso de que se produzca aprendizaje sin que se hayan detectado oportunidades explícitas. En estos casos, Cobo (1998) considera que estos aprendizajes son debidos a la reestructuración cognitiva producida como consecuencia de reflexiones no explícitas durante los procesos de resolución o debidas a reflexiones individuales posteriores sobre los procesos de resolución.

2.5. Conocimiento especializado del profesor de matemáticas

Los sujetos de nuestro estudio son estudiantes del Grado de Magisterio de Educación Primaria. Nuestra pretensión es mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje para que adquieran el conocimiento necesario para ejercer como profesores de matemáticas en edades entre 6 y 12 años. Aquí fijaremos las bases de lo que consideramos conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Comenzaremos revisando la cuestión en general para ver las líneas de investigación que se están desarrollando. Más tarde veremos las que guardan relación específicamente con la geometría y en particular con las isometrías.

Además de conocimiento matemático, los estudiantes deben adquirir conocimiento didáctico. Así que a continuación, consideramos las líneas de investigación en torno a conocimiento didáctico que debe adquirir un maestro en su periodo de formación. En particular, hay investigaciones sobre cómo intervienen las discusiones en gran grupo en la adquisición de competencias didácticas en futuros maestros. Por otro lado, nuestra experiencia nos hace pensar que las creencias que los estudiantes tienen sobre las matemáticas o su auto-concepto influye en su aprendizaje durante los cursos universitarios, así que dedicaremos un apartado a investigaciones relacionadas con esto.

El conocimiento para la enseñanza es un foco de atención en auge para la comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas. La ausencia de un conocimiento especializado del contenido hace que los maestros no sepan cómo enfrentar las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas en los niños. Esto se debe, según diversas investigaciones (Godino,Rivas, Castro y Konic, 2012) a que posiblemente los futuros docentes no tengan una fuerte formación matemática y didáctica. El grupo SIDM de la Universidad de Huelva ha desarrollado un modelo llamado Conocimiento Especializado del profesor de matemáticas, MTSK por sus siglas en inglés (Mathematical Teacher's Specialized Knowledge) (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013). Basándose en los subdominios de Shulman (1986) y Ball, Thames y Phelps (2008) pretende concretar el conocimiento especializado necesario para realizar la labor de profesor de matemáticas. Así, está compuesto por tres dominios, (Carrillo y Díaz, 2019):

1. *Dominio de contenido matemático*. Se divide en tres subdominios:
    - Conocimiento de los temas (Knowledge of Topic, KoT),
    - Conocimiento de la estructura matemática (Knowledge of the Structure of Mathematics, KSM)
    - Conocimiento de la práctica matemática. (Knowledge of Practices of Mathematics, --KPM).
2. *Dominio del conocimiento didáctico del contenido matemático.* Se divide en tres subdominios:
    - Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (Knowledge of Mathematics Teaching, KMT)
    - Conocimiento de las características del aprendizaje matemático. (Knowledge of Features of Learning Mathematics, KFLM).
    - Conocimiento de los estándares de aprendizaje matemático. (Knowledge of Mathematics Learning Standars, KMLS).
3. *Dominio de creencias y concepciones sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje*: Es el elemento que permite entender de una forma más íntegra el conocimiento del profesor (Montes, Contreras y Carrillo, 2013)

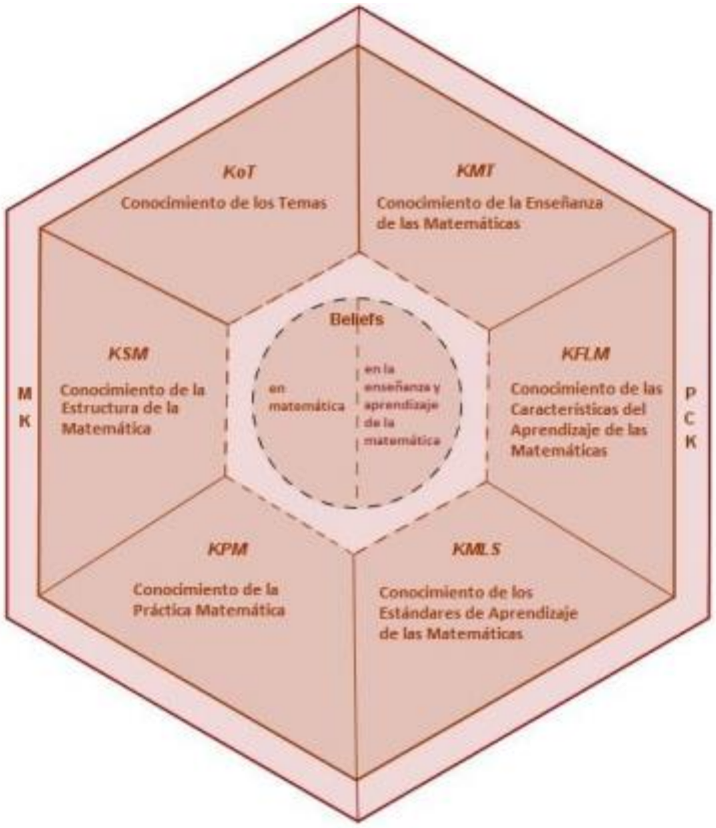


Figura 1 Conocimiento especializado del profesor de matemáticas

(Carrillo y Díaz, 2019; Montes et al., 2013)

2.5.1. Contenido matemático en la formación del profesorado.

La base del conocimiento pedagógico-matemático que un maestro debe tener se sustenta de una manera especial sobre los conocimientos que tiene de los contenidos matemáticos (Arteaga Martínez, Navarro Asencio, Fraile Rey y Ramos Alonso, 2018; Giacomone, et al., 2018). Es decir, una enseñanza adecuada de las matemáticas requiere el dominio de la materia por parte del profesor.

Las investigaciones sobre la formación del profesorado han puesto de manifiesto la importancia de focalizar la atención en las características de los procesos de construcción del conocimiento necesario para enseñar matemáticas (Climent, Montes, Contreras, Carrillo, Liñán, Muñoz-Catalán, Barrera y León, 2016). Uno de los focos es el análisis del tipo de conocimiento especializado que ponen en juego cuando resuelven tareas en el entorno formativo. Ponemos especial énfasis en este foco por las características de nuestra investigación.

Diremos que cualquier usuario de la matemática en su labor profesional tiene un conocimiento común del contenido que diferenciamos del conocimiento especializado del profesor de matemáticas que es el que necesita para ejercer su profesión (Montes et al., 2013). García-Honrado, Clemente, Venegas, Badillo y Fortuny (2018) asumen el conocimiento especializado de futuros maestros como una conceptualización del conocimiento específico que poseen o podrían poseer para el aprendizaje de las matemáticas. En concreto, caracterizar el conocimiento matemático proporciona herramientas para el diseño de propuestas de formación que promuevan en los futuros maestros el desarrollo de procesos como razonar, argumentar, generalizar y hacer un uso con significado del conocimiento matemático. Describimos los subdominios del modelo MTSK relativos al contenido matemático (Carrillo y Díaz, 2019):

- Conocimiento de los temas (KoT) se refiere al contenido disciplinar de las matemáticas, es decir el que figura en manuales y libros de texto. Incluye aspectos fenomenológicos, significados de conceptos, o ejemplos específicos que caracterizan aspectos concretos del tópico abordado.
- Conocimiento de la estructura matemática (KSM): El profesor debe integrar los conceptos en un sistema de conexiones. Esto le permitirá comprender ciertos conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y desarrollar ciertos conceptos elementales mediante el tratamiento a través de herramientas avanzadas.
- Conocimiento de la práctica matemática (KPM): Incluye aspectos ligados a saber cómo se piensa en matemáticas. Es decir, es el conocimiento del modo de hacer matemáticas, que se refiere a qué es una definición, qué reglas siguen las demostraciones, diferentes formas de argumentar, entre otras prácticas.

Arteaga Martínez et al., (2018) plantean la necesidad de construir unos estándares que definan los conocimientos matemáticos que un estudiante de Magisterio de Educación Primaria necesita para obtener el título de graduado. En su dedicación docente como maestros en la etapa de Primaria, es muy probable que ejerzan como guías en la adquisición de las capacidades que se requieren en la resolución de problemas, por ello deben poseer estas capacidades. La cuestión que nosotros nos planteamos es cuál es el mejor proceso de enseñanza-aprendizaje que se puede dar en su formación inicial universitaria. ¿Los estudiantes de Magisterio de Educación Primaria poseen la formación suficiente en conocimientos matemáticos?

Según muestran varios estudios (Méndez, Sánchez-Huete y Méndez, 2017) el futuro profesorado que tiene que preparar en las etapas de Educación Infantil y Primaria ostenta un nivel de razonamiento abstracto claramente mejorable. Por tanto, cuando ejerza, poseerá claras dificultades para entender y explicar contenidos de ciencias. Debido a ello, se hace necesario que los diversos agentes educativos aborden el problema con el fin de lograr que nuestros maestros tengan mayores capacidades para impartir ciencias a alumnos de edades tempranas.

Los resultados obtenidos en PISA y TIMSS sitúan a España en un escenario preocupante. Estas pruebas muestran desde hace años en las sucesivas evaluaciones en materias como matemáticas que la media de nuestros estudiantes se sitúa por debajo de la media de la OCDE. Por ello, Sánchez-Huete, Pérez-Bonet, Méndez-Coca, Rodríguez-López y Martín-Nieto (2019) coinciden con Gutiérrez Gutiérrez, Gómez y Rico (2016) en que se debe afrontar el problema de la formación de maestros y maestras desde una perspectiva crítica y rigurosa. La transferencia a los programas de formación de maestros de los resultados de las investigaciones sobre el aprendizaje matemático de los estudiantes de educación primaria y secundaria, implica la transformación de los contenidos de los programas de formación (Bernabeu y Llinares, 2016). El carácter de abstracción que poseen muchos de los conceptos matemáticos que se emplean para hacer ciencia dificulta su aprendizaje y manejo (Sánchez-Huete y Fernández-Bravo, 2003). El hecho de que los docentes, en general, no dispongan de un sólido conocimiento de contenidos matemáticos, los lleva a programar la tarea escolar de resolución de situaciones problemáticas de una manera rutinaria, cuyo objeto es lograr la solución esperada, sin atender al proceso en sí. Esto provoca que los niños, alumnos de primaria, estén más atentos a la conformidad del profesor con el resultado que a la validez de la estrategia empleada. (Sánchez-Huete et al., 2019).

El TESD-M (Teacher Education Study in Mathemtatics) de la IEA (Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento educativo) fue un estudio comparativo internacional sobre la formación inicial del profesorado de matemáticas en educación primaria y educación secundaria obligatoria. Surgió de la constatación de las diferencias y deficiencias en el rendimiento matemático de los escolares de distintos países, de acuerdo con los resultados proporcionados por el estudio internacional TIMSS. Se basa en el supuesto de que un importante factor que puede explicar esas diferencias tiene que ver con la formación inicial del profesorado en los distintos países. La participación española se limitó a la formación inicial de futuros profesores de educación primaria, alumnos de la titulación de Maestro Especialista en Educación primaria, con el programa de diplomatura vigente en 2008. El INEE publicó el informe español “Estudio Internacional sobre la formación en matemáticas de los maestros” (Ministerio de Educación, cultura y deporte, 2013).

Este estudio presta especial atención a la relación entre las políticas educativas, el currículo, las prácticas en la formación del profesorado y los resultados finalmente logrados. Para ello, TESD-M consta de tres componentes estrechamente relacionados. El tercer componente aborda conocimiento matemático y pedagógico-didáctico que tienen los futuros profesores de matemáticas. Se aborda a partir de la información obtenida de pasar cuestionarios a estudiantes de último curso de carrera. Éstos incluyen preguntas de respuesta cerrada y abierta, se dirigen a obtener información sobre el conocimiento adquirido por el futuro profesorado sobre las matemáticas, sobre la enseñanza en general y sobre la didáctica en esta disciplina.

Gutiérrez Gutiérrez et al., (2016) caracterizan el conocimiento matemático que los futuros profesionales de primaria españoles manifiestan en el estudio internacional TEDS-M. Encuentran que los futuros maestros tienen un conocimiento suficiente de los contenidos previstos para primaria y los primeros cursos de secundaria con excepción de los conceptos razón/proporción/porcentaje y la traducción de resta de fracciones sencillas a problemas verbales. Sin embargo, manifestaron un conocimiento insuficiente en matemáticas avanzadas, aunque revelaron conocer la propiedad de la densidad del conjunto de los números racionales. El objetivo de estos autores era que los resultados de su estudio se utilizaran para el diseño de asignaturas de Grado de Maestro de Primaria.

A continuación, nos centramos en el conocimiento geométrico que debe tener un profesor de matemáticas y nos planteamos cómo debe estar presente en su formación inicial.

Contenido geométrico en la formación del profesorado.

Los futuros maestros y maestras deben desarrollar las competencias matemáticas y didácticas para facilitar el aprendizaje de sus estudiantes. En particular, las competencias geométricas. Para guiar a los estudiantes en el conocimiento científico, es fundamental saber cómo son los procesos de pensamiento necesarios para la comprensión de estos conceptos y cómo favorecer la mejora de su razonamiento para facilitar la comprensión de la ciencia. Los maestros deben conocer las etapas de desarrollo intelectual y los conocimientos de materias específicas (Lawson 2009).

Según Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero (1 de marzo, 2014) uno de los objetivos principales del área va encaminado a iniciarse en la resolución de problemas que requieren, entre otros, conocimientos geométricos. Este documento se encuentra estructurado en cinco bloques: el cuarto de ellos corresponde a Geometría. Establece como contenidos la identificación de figuras (polígonos, cuadriláteros, paralelogramos, circunferencia, …), elementos básicos (lados, diagonales, simetrías, concavidad / convexidad, …), clasificar figuras según diferentes criterios, y composición y descomposición de figuras que lleva a la introducción de la medida (Bernabeu y Llinares, 2016). La enseñanza de la geometría en educación primaria requiere el dominio de estos conceptos por parte del maestro (Arteaga Martínez et al., 2018; Giacomone et al., 2018).

Desde hace años, en las investigaciones sobre el aprendizaje y enseñanza de la geometría en la formación del profesorado se pone en evidencia la necesidad de mejorar los conocimientos geométricos de futuros maestros, ya que se han detectado serias carencias en la comprensión de los conceptos, en la visualización espacial y en el uso del vocabulario apropiado, entre otros aspectos (Ruiz, 2012; González et al., 2007).

La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) es un espacio de debate conceptual y metodológico sobre temas que interesan en el aprendizaje de las matemáticas. Para ello promueve la construcción de grupos de investigación y trata de influir en la toma de decisiones en relación con el impulso de la Educación Matemática. De una encuesta realizada en diciembre de 2014 se extrajo la siguiente información sobre la participación de socias/os en grupos de investigación.

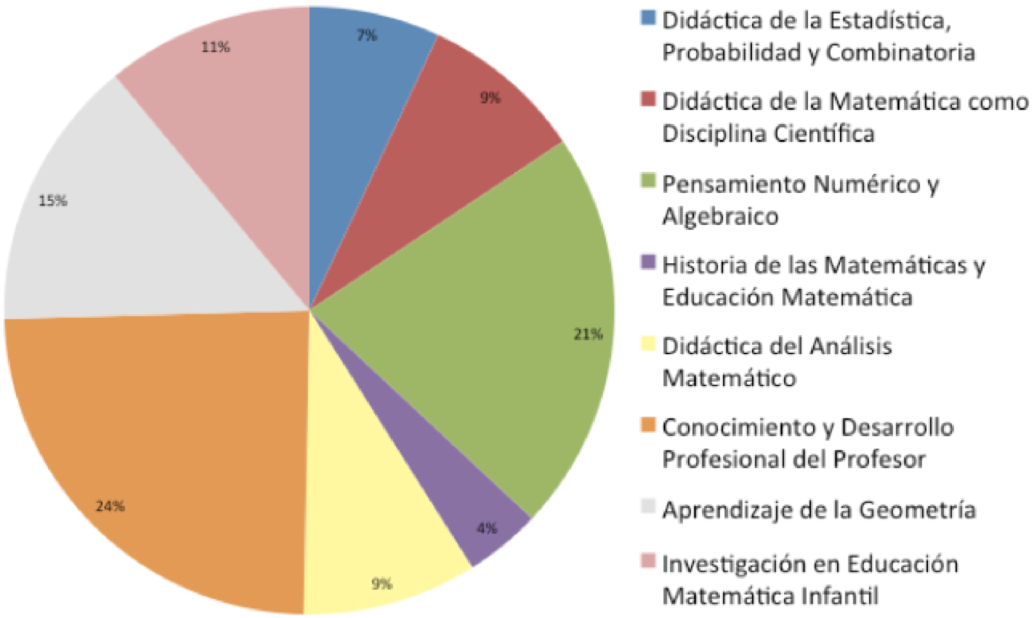


Figura 2 Participación en grupos de investigación SEIEM

(SEIEM, 2014)

El aprendizaje de la geometría representa un 15% de la participación, siendo la tercera disciplina con más participación. Dentro de este grupo, una temática que genera interés es la formación del profesorado.

Uno de los objetivos del programa de formación de futuros maestros, en el ámbito de la didáctica de las matemáticas es que los estudiantes sean capaces de reconocer las características de la progresión del aprendizaje matemático de los diferentes tópicos matemáticos del currículo para poder planificar la enseñanza de manera que se apoye en esta progresión (Bernabeu y Llinares, 2016). Para describir la progresión del aprendizaje de las formas geométricas asumimos el modelo de Van Heile (Battista, 2007), compuesto por cuatro niveles. Para que el estudiante progrese al siguiente nivel debe haber superado los niveles anteriores:

- *Nivel 1: Reconocimiento, visualización.*

  Los estudiantes están en este nivel cuando sus esquemas cognitivos les permiten basarse en la apariencia física de los objetos para reconocerlos. Distinguen las figuras y los cuerpos por sus formas y semejanzas físicas, sin detectar relaciones entre sus partes pues las perciben globalmente. Frecuentemente se hacen descripciones por su semejanza con otros objetos: “se parece a…”, “tiene forma de…”.

- *Nivel 2: Análisis.*

  En este nivel, los esquemas cognitivos permiten a los estudiantes pensar sobre las figuras en término de sus propiedades. Comienza a desarrollarse la conciencia de que las figuras constan de partes. Sin embargo, esto no les permite determinar cómo diferentes figuras pueden estar relacionadas, por ello no podrán realizar actividades de clasificación. Además, aunque identifiquen los diferentes elementos de las figuras, no llegan a comprender cómo estos elementos están relacionados.

  Tienen problemas en la clasificación de figuras y en lo que significa definir.

- *Nivel 3: Clasificación.*

  Cuando los estudiantes empiezan a relacionar los atributos y generar agrupamientos/clasificaciones se considera que están en este nivel. Comienzan a establecerse relaciones lógicas entre las propiedades, reconociendo que unas propiedades se deducen de otras y de descubrir implicaciones. Los alumnos son capaces de relacionar propiedades de figuras y entre figuras.

- *Nivel 4: Deducción formal*

  Este nivel queda fuera del aprendizaje geométrico en educación primaria. Cuando un individuo llega a este nivel es capaz de deducir formalmente teoremas.

Los futuros profesores deben reconocer las características de la progresión del aprendizaje de las formas geométricas en educación primaria, derivado de los contenidos geométricos presentes en el Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero (1 de marzo, 2014) y de los niveles de progresión del aprendizaje del modelo de Van Hiele.

Desde hace tiempo se asume que el aprendizaje de los estudiantes para maestro depende de las tareas-actividades que se les proponen y de las metodologías vinculadas (Llinares, Valls y Roig, 2008). Es fundamental que en el diseño de las secuencias didácticas se tenga presente el objetivo de aprendizaje. Según Bernabeu y Llinares (2016) para el diseño de tareas prácticas, los formadores del Grado de Magisterio deben considerar :

“ *- La descripción de un modelo de progresión en la comprensión de las formas geométricas.*

- *La identificación de actividades y problemas susceptibles de ser usados en educación primaria, y*
- *Registros de la práctica ejemplificando los hitos o características claves de la progresión del pensamiento geométrico que sirvan como base para el desarrollo de maneras de pensar del maestro (eligiendo actividades matemáticas, identificando elementos matemáticos relevantes, anticipando posibles respuestas, pensando en actividades alternativas…).”*

Bustos Rubilar y Zubierta Badillo, (2019) realizan un estudio sobre la influencia de la interacción social en el aprendizaje de la geometría en la formación de profesores de matemáticas, en el contexto de una maestría en Educación Matemática en México. Implementan una actividad diseñada bajo los principios de método de enseñanza de aprendizaje colaborativo, debate científico y autocorrección. El fin es generar un ambiente que promueva las interacciones sociales entre los estudiantes. La información se obtuvo a partir del análisis de hojas de trabajo de los estudiantes y de videograbaciones. A medida que se avanzó en las etapas de la actividad, la mayoría de los estudiantes reformularon sus respuestas, consecuencia sobre todo de que fueron ellos quienes actuaron como autoridad al consensuar la justificación apropiada para la conjetura. En las etapas de trabajo en equipo y de debate, los estudiantes desarrollaron la actividad en un ambiente que propició los procesos de conjetura y validación, lo que generó oportunidades para que ellos mismos reformularan sus respuestas después de ver y entender las soluciones de sus compañeros. El hecho de que los estudiantes tuvieran la oportunidad de intercambiar ideas o puntos de vista los ayudó a mejorar sus validaciones y a comprender el significado de justificar en el contexto de las matemáticas.

En nuestro estudio la interacción social de los estudiantes juega un papel esencial. Además, nos centramos en la enseñanza y el aprendizaje de las isometrías en la formación de maestros de Educación Primaria. Por ello consideramos fundamental el siguiente apartado en el que hablamos de la importancia de este contenido geométrico en la formación del profesorado de primaria.

Importancia del aprendizaje de las isometrías en futuros maestros de primaria

Algunas investigaciones han destacado las ventajas del estudio de las transformaciones geométricas (Thaqi, 2009). Además, los movimientos rígidos en el plano son contenido de educación Primaria (Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero. 1 de marzo, 2014) y los maestros deben dominar la materia que van a impartir. La ausencia de un conocimiento especializado del contenido hace que no se reconozca cómo enfrentar las dificultades del niño (Sámuel et al., 2018). Otra razón que justifica su tratamiento en el Grado de Educación Primaria es que las isometrías favorecen la comprensión de la geometría por sus características dinámicas. Pese a todas estas razones y ventajas, generalmente los estudiantes muestran poco conocimiento sobre movimientos (Thaqi y Gimenez, 2016).

Trabajar problemas cuyos contenidos están relacionados con movimientos rígidos en el plano contribuye a la adquisición de la competencia visual y la formalización de construcciones geométricas. Además, la elaboración de argumentos en torno a la solución ayuda a los alumnos a mejorar las competencias discursiva y lingüística, que se potenciarán en las discusiones en gran grupo. Por otro lado, comprender otros conceptos relacionados es necesario para el proceso completo de enseñanza-aprendizaje del tema y realizar conexiones con otras situaciones puede completar el progreso matemático de los alumnos (Morera, 2013).

Según la investigación de Thaqi, Gimenez y Aljimi (2016), muchos alumnos no expresan explícitamente que las aplicaciones isométricas conservan la forma y el tamaño. Si los estudiantes reconocen las transformaciones como una función que transforma la figura punto a punto, es fácil identificar la dependencia entre las posiciones de una figura y su imagen. Llegados a este punto, reconocen la importancia de los elementos como el eje de simetría, el vector de traslación, el ángulo o el centro de giro. En los casos en los que los estudiantes consideran las transformaciones geométricas como un cambio de posición de un objeto o figura, encuentran dificultades para establecer la importancia que tienen los elementos que forman parte de las diferentes isometrías.

En particular, la simetría es una noción aparentemente conocida por los futuros maestros, pero ello no quiere decir que se tenga bien contextualizada. Aunque la idea de transformación aparezca en edades tempranas, en la mayoría de textos escolares y para la formación de maestros, la simetría se presenta como una noción estática, en la observación de figuras simétricas, sin valorar otras propiedades importantes como la relación entre puntos homólogos (Sámuel et al., 2018).

Thaqi y Gimenez (2016) concluyen que las actividades que aparecen en los libros de matemáticas de educación primaria, por sí mismas, no ofrecen al estudiante la posibilidad de construir conocimientos rigurosos sobre transformaciones geométricas. Por ello, es necesario un profesional preparado con conocimientos matemáticos y didácticos. El contenido presentado en los libros puede ser útil para una correcta y completa construcción del conocimiento cuando el maestro está preparado para desarrollar nuevas actividades e implementarlas en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Promover un tratamiento adecuado y rico de las isometrías en la etapa de Educación Primaria implica potenciar y mejorar el conocimiento matemático y didáctico de los futuros docentes relacionado con estos contenidos.

2.5.2. Conocimiento didáctico del contenido matemático en la formación del profesorado.

Un problema importante en educación matemática consiste en dilucidar qué tipo de conocimiento didáctico-matemático debería tener el profesor de matemáticas para desarrollar su tarea docente de forma adecuada. (Giacomone et al., 2018).

Al instalarse la noción de competencia en el ámbito de la educación matemática se ha generado un gran impacto en el desarrollo curricular, en la práctica de la enseñanza y en la evaluación. En el caso de la formación de profesores, se considera necesario centrar la atención en el desarrollo de competencias de análisis y reflexión sobre la práctica docente (Pochulu, Font y Rodríguez, 2016). Se asume que los profesores de matemáticas deben desarrollar la *competencia específica de análisis de intervención didáctica,* entendida según Giacomone et al., (2018) como la capacidad de abordar los problemas propios de la profesión. Esto implica que el maestro debe conocer y saber usar las herramientas metodológicas y conceptuales pertinentes que le ayuden a planificar, descubrir, comprender y valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Describimos aquí los subdominios relativos al conocimiento didáctico del contenido incluidos en el modelo MTSK del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Carrillo y Díaz, 2019):

- Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT): Incluye distintas estrategias y recursos. Las estrategias de enseñanza deben permitir al profesor fomentar un desarrollo de las capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales. Corresponde a los recursos posibilitar al docente hacer que sus alumnos descubran mediante la manipulación ciertos conceptos matemáticos, o ejemplos que consigan despertar a los alumnos la intuición respecto de algunos conceptos.
- Conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM): El profesor debe saber cómo aprenden los alumnos el contenido matemático. Este subdominio abarca los procesos de comprensión de los estudiantes de los distintos contenidos, los errores, dificultades y

obstáculos asociados a cada concepto, o el lenguaje habitualmente usado por los estudiantes en relación con el concepto tratado en clase.

- Conocimiento de los estándares de aprendizaje en matemáticas (KLMS): El profesor de matemáticas debe conocer el currículo institucional. Puede complementarse con información procedente de las distintas investigaciones en el área de didáctica de las matemáticas respecto a los logros de aprendizaje esperados en cada etapa.

Uno de los objetivos del programa de formación de futuros maestros, en el ámbito de la didáctica de las matemáticas es que los estudiantes sean capaces de reconocer las características de la progresión del aprendizaje matemático de los diferentes tópicos matemáticos del currículo para poder planificar la enseñanza de manera que se apoye en esta progresión (Bernabeu y Llinares, 2016). La competencia didáctica *“mirar profesionalmente”* (en inglés, *“professional noticing”)* es un objetivo en la formación de maestros (Mason 1998, 2002). Con este término se intenta recoger lo que los profesores piensan sobre su práctica para comprenderla y mejorarla. Consiste en usar el conocimiento para determinar lo que es relevante en una situación de enseñanza y establecer relaciones con las ideas teóricas (Sherin, 2007). Según Llinares (2018), es un proceso de razonar sobre la enseñanza basado en el conocimiento. La calidad del proceso está determinada por la estructura del argumento práctico generado sobre la situación, con la intención de actuar de una determinada manera. Una de las características que define el proceso de llegar a ser un experto en didáctica de las matemáticas es la manera en la que un profesor identifica lo que es relevante en una situación de enseñanza y lo que conoce para interpretarlo (Llinares, 2012).

Mirar profesionalmente permite centrar la atención sobre la manera en la que los maestros en formación aprenden a usar el conocimiento sobre matemáticas y sobre didáctica de las matemáticas para comprender las situaciones de enseñanza y actuar como profesores. El proceso de razonamiento se puede dar tanto mirando la propia actividad docente como la desarrollada por otro. El objetivo es desarrollar formas de razonar sobre la enseñanza de las matemáticas, explicando las acciones que la constituyen como una manera de definir acciones (Llinares, 2018).

El diseño de tareas-prácticas en el programa de formación para maestros con el objetivo de desarrollar la competencia docente *mirar profesionalmente* se apoya en la identificación de un conocimiento (la trayectoria de aprendizaje de contenidos curriculares), reconocer lo relevante de una situación, interpretarlo y tomar decisiones para continuar la enseñanza con el objetivo de apoyar la progresión en el aprendizaje de los estudiantes (Bernabeu y Llinares, 2016). Las tareas-prácticas diseñadas considerando estas referencias tienen como objetivo aproximar el aprendizaje de los estudiantes para maestro a la tarea profesional que desarrollarán con posterioridad.

Algunas investigaciones tratan sobre la adquisición de competencias didácticas a través del desarrollo de discusiones en gran grupo en el Grado de Magisterio de Educación Primaria. A continuación, destacamos algunas de ellas por la importancia que tienen las discusiones en gran grupo en nuestro estudio.

Investigaciones sobre la adquisición de competencias didácticas en el Grado de Magisterio de Primaria mediante discusiones en gran grupo.

Son varios los investigadores que en el campo de la didáctica de las matemáticas se han interesado por la adquisición de competencias didácticas de futuros maestros (Beltrán-Pellicer, Ricart y Estrada, 2019; Ricart y Estrada, 2017). En particular, algunos han analizado las oportunidades de adquisición de competencias didácticas que surgen en un entorno social (Bernabeu y Llinares, 2016; Godino, Batanero, Font, Contreras y Wilhelmi, 2016).

Pochulu et al., (2016) realizan un estudio cuyo objetivo es investigar cómo el proceso de construcción de una secuencia de tareas realizadas por los asistentes influye en el desarrollo de su competencia de análisis didáctico. Elaboran un diseño y, tras la implementación, un rediseño de un curso de formación, dirigido a formadores de futuros profesores de Matemáticas de educación secundaria. Aplican la metodología *“design research*” que explicamos con detalle en el apartado 3.2. Después de cada implementación, realizan un análisis retrospectivo del proceso formativo que permite a profesores e investigadores reflexionar sobre cada uno de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y así, determinar mejoras potenciales para futuras implementaciones. Entre otras conclusiones, afirman que el factor tiempo es un recurso que ha de considerarse para una gestión adecuada, ya que la herramienta configuración epistémica/cognitiva de objetos primarios necesita un proceso de apropiación largo y probablemente un proceso de instrucción específico y sostenido a lo largo de varias sesiones.

También en el contexto de formación de futuros profesores de Matemáticas de educación secundaria, Giacomone et al., 2018 llevan a cabo una investigación con un enfoque "*design research*". Las observaciones y anotaciones durante el desarrollo de la intervención, y el análisis de las respuestas elaboradas por los estudiantes (futuros profesores) permitieron extraer algunas conclusiones sobre las dificultades de comprensión de las consignas, los logros alcanzados y las posibilidades ofrecidas por el diseño formativo. Se observa un progreso cognitivo-afectivo ya que los estudiantes manifiestan tomar conciencia de progresar en su desarrollo profesional. Además, muestran ser conscientes de la importancia en el dominio de herramientas que ayuden a comprender las dificultades de aprendizajes. Las tareas que se proponen requieren poner a funcionar diversos modos de expresión matemática (verbal, visual y simbólica) incluyendo situaciones donde el alumno tiene que argumentar, interpretar y representar. La actividad de resolver problemas provoca que los estudiantes movilicen sus conocimientos previos para discernir qué matemáticas ponen en juego para la resolución de la tarea. El trabajo grupal favoreció el diálogo y la comunicación entre los estudiantes, siendo un aspecto positivo que contribuye al mejor aprendizaje de los alumnos. El profesor tiene un rol activo con el fin de generar reactivos en los participantes y obtener información más relevante. En la puesta en común los estudiantes son estimulados a explicar, justificar, discrepar, cuestionar alternativas y reflexionar.

2.5.3. Creencias y concepciones sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje en la formación del profesorado.

La actividad que los profesores desarrollan en sus aulas parece estar orientada por sus concepciones sobre la matemática. Algunas de estas, como las relativas a la naturaleza de la disciplina mantienen un cierto estatus contaminante. Así, algunos maestros comunican informaciones de las que, incluso, pueden no estar convencidos (Carrillo, Flores, Climent, Contreras, Aguilar, Escudero y Montes, 2014). La visión que los alumnos tienen de la disciplina, su finalidad en la enseñanza, la toma de conciencia de sus capacidades para aprenderla, los valores socioculturales que pueden atribuirle, así como el significado y el sentido de los problemas dependen en gran medida de los mensajes que reciben del profesor y son elaborados desde sus creencias. Por ello, es especialmente relevante el papel de las creencias y concepciones en la formación del profesorado.

En un estudio de 2017 sobre las emociones de los estudiantes de magisterio en relación a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ciencias y de las matemáticas (Arnau Amat, 2017), la autora concluye que la escolarización recibida a lo largo de los años tiene una influencia en la carga emocional de los futuros maestros. Según Suavita y Murillo (2017), el sentir de los maestros en formación es que las matemáticas no son para todos. Consideran que para poder explicar la resolución de un problema es necesario contar con ciertas capacidades “de más” y que el esfuerzo es menos importante que la capacidad innata. Estos resultados sugieren una especie de imposibilidad estudiantil asumida. Sin embargo, según Arnau Amat (2017), los estudiantes son capaces de transcender las emociones que habían vivido y positivarlas cuando se imaginan trabajando como maestros.

Van Vaerenbergh (2019) aplica a una muestra de estudiantes para maestro de primaria el cuestionario sobre Dominio Afectivo en la Resolución de Problemas Matemáticos (RPM). Comparando por géneros, afirma que las mujeres tienen menos confianza en ellas mismas y se muestran algo más nerviosas e inseguras a la hora de resolver problemas matemáticos. Concluye además, que estos alumnos no perciben que las destrezas o habilidades utilizadas en las clases de matemáticas para resolver problemas tengan que ver con las utilizadas para resolver problemas en la vida cotidiana. Sin embargo, son conscientes de que cuanto más tiempo le dedican al estudio de las matemáticas obtienen mejores resultados, opinan que el factor suerte tiene poco que ver y son conscientes de la importancia del estudio en el proceso de aprendizaje.

2.6. Resumen de enfoques y teorías que fundamentan esta investigación.

Consideramos necesario aportar aquí un resumen de enfoques y teorías que hemos presentado en el marco teórico y que fundamentan nuestra investigación, en la que hemos planificado e implementado una secuencia didáctica. Tras cada una de las implementaciones llevamos a cabo un exhaustivo proceso de reflexión que permite re-adaptar el proceso formativo.

Utilizamos discusiones en gran grupo de la resolución de problemas matemáticos en clase como recurso para crear oportunidades de aprendizaje a los estudiantes. Es razonable pensar que las discusiones en gran grupo no son ricas por sí mismas y es conveniente que vayan acompañadas de una preparación previa, una gestión adecuada y una reflexión posterior por parte del profesor.

Hemos elegido GeoGebra como SGD que mejor se adapta a nuestras necesidades. Creemos que esta herramienta facilita el tránsito a niveles más elevados de generalización y abstracción. En concreto, veremos cómo interviene en la adquisición de competencias geométricas y didácticas. Consideramos importante solicitar la justificación explícita de la secuencia de pasos tanto para que el propio alumno ponga en juego los conceptos y las propiedades como para el análisis de la implementación, de las oportunidades de aprendizaje y del progreso matemático.

Implementamos la estructura de trabajo de Morera (2013) en el Grado de Magisterio de Educación Primaria y pretendemos comprobar si sus resultados son extrapolables a nuestro contexto. La autora divide la puesta en común de problemas en estadios: *situación del problema, presentación de una solución (argumentada), estudio de diferentes estrategias para resolver o argumentar, estudio de casos particulares o extremos, contraste entre diferentes soluciones, conexiones con otras situaciones, generalización y conceptualización, reflexión sobre el progreso matemático.* Afirma que el análisis detallado de las características de las discusiones en gran grupo con tecnología aporta una visión detallada de los elementos que intervienen y ayuda a entender de qué manera una serie de situaciones contribuyen a facilitar el progreso de los estudiantes

Tabla 1 Resumen

<table>
<tr><td rowspan="2">perspectivas</td><td>Discursiva</td><td>Discusiones en gran grupo como recurso para crear oportunidades de aprendizaje. Preparación previa, gestión adecuada y reflexión posterior por parte de la profesora.</td></tr>
<tr><td>Instrumental</td><td>GeoGebra como herramienta facilitadora del tránsito a niveles de generalización y abstracción. Solicitamos justificación explícita de los pasos para que el alumno ponga en juego conceptos y propiedades.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Implementamos la estructura de trabajo de Morera (2013). Estadios: situación del problema, presentación de una solución (argumentada), estudio de diferentes estrategias para resolver o argumentar, estudio de casos particulares o extremos, contraste entre diferentes soluciones, conexiones con otras situaciones, generalización y conceptualización, reflexión sobre el progreso matemático</td></tr>
</table>

Capítulo 3. Metodología de la investigación

Después de realizar el estudio teórico, presentaremos ahora nuestro problema de investigación y el diseño que nos permitirá darle respuesta. Nuestra investigación se ubica dentro del paradigma denominado *“design research*” con métodos cualitativos e interpretativos aplicados al análisis de datos de clase.

En primer lugar, detallaremos el planteamiento del problema y los principales objetivos de la investigación. A continuación, explicamos el paradigma de investigación. Después, los instrumentos construidos, en relación con los objetivos planteados.

3.1. Planteamiento de la investigación

Realizamos un estudio desde dos perspectivas: discursiva e instrumental. Analizaremos la efectividad de discusiones en gran grupo bajo el soporte GeoGebra en el Grado de Magisterio de Educación Primaria.

Consideramos fundamental que las acciones y propuestas diseñadas vayan siempre acompañadas de un interés por fomentar el aprendizaje de los alumnos, es decir, que las discusiones en gran grupo con tecnología tengan por objetivo mejorar la competencia matemática de los alumnos. Además, en el grado de Magisterio en Educación Primaria se incide en la importancia de las competencias profesionales del futuro maestro, en concreto se debe “desarrollar y evaluar contenidos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y promover las competencias correspondientes de los estudiantes”. Por ello, nos parece necesario introducir la competencia didáctica en nuestro estudio.

Para que las discusiones en gran grupo con tecnología se puedan considerar productivas desde el punto de vista del aprendizaje del alumno (matemático o didáctico) es imprescindible que éste realice progresos a partir de oportunidades de aprendizaje que se hayan generado en el aula. Por este motivo, una parte esencial de la investigación se centra en el estudio de las oportunidades de aprendizaje que se hayan podido generar en la situación de enseñanza, junto con el análisis del aprovechamiento de estas oportunidades por parte de los alumnos. Un supuesto básico, es considerar las oportunidades de aprendizaje como evidencia misma del aprendizaje.

Consideramos *oportunidades de aprendizaje* todas las situaciones que se dan en los procesos de resolución, en las que a los alumnos se les presenta la posibilidad de reorganizar sus estructuras conceptuales, procedimentales, o de gestión de conocimiento. Es decir, construir nuevas conexiones o de relacionarlas con el aprendizaje de nuevas formas de proceder en la resolución de los problemas que están trabajando.

A continuación, planteamos los objetivos que pretendemos conseguir con esta investigación.

3.1.1. Objetivos de la investigación

Siguiendo los criterios que deben guiar un problema de investigación (relevancia, rigor, precisión y exactitud), nuestro objetivo será responder a la pregunta planteada en los siguientes términos:

¿Cómo se pueden potenciar las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje de las isometrías en futuros maestros de primaria, mediante la orquestación de discusiones en gran grupo con el uso de la tecnología?

El hecho de centrarnos en las isometrías se justifica en apartado 2.5.2 del marco teórico. La geometría es un dominio demasiado extenso para establecer relaciones de enseñanza y aprendizaje detalladas en un único trabajo de investigación. Además, admiten un tratamiento con SGD, dado su dinamismo y las posibilidades de transformaciones en el plano.

Consideramos la gestión de una manera global, para acabar tratando posibles formas de gestionar la enseñanza y el aprendizaje a lo largo del diseño experimental y su análisis. Las discusiones en gran grupo y el uso de la tecnología constituyen la base de este estudio, indican el contexto pedagógico y didáctico en el que se desarrolla la investigación. El estudio tiene por finalidad ofrecer resultados científicos de enseñanza y aprendizaje donde coexisten ambas situaciones en el aula.

Pretendemos aproximar respuestas a la pregunta de investigación por medio de la consecución de los dos objetivos fundamentales siguientes:

1. Analizar una sistemática de planificación, implementación y evaluación de una secuencia didáctica con discusiones en gran grupo bajo el soporte de GeoGebra.
2. Detectar oportunidades de aprendizaje de las isometrías y de contenidos didácticos específicos, así como su aprovechamiento en el contexto de la secuencia didáctica creada a partir de la sistemática anterior.

El primer objetivo del estudio está centrado en las prácticas de enseñanza del profesor. Se examina la aplicación de las fases de una sistemática, con la peculiaridad del uso del SGD, que pretende generar discusiones productivas matemática y didácticamente.

El segundo objetivo está centrado en el aprendizaje de los alumnos. Para comprobar la operatividad de la sistemática analizamos las puestas en común con los alumnos. Tratamos de detectar qué oportunidades de aprendizaje se han producido y cómo han sido aprovechadas por los alumnos. Las oportunidades aprovechadas son las que contribuyen a validar la sistemática aplicada.

3.2. Diseño de la investigación

La investigación educativa se caracteriza por la flexibilidad de enfoques teóricos y metodológicos debido a las dificultades propias de los problemas de estudio.

Toda investigación de calidad debe ser objetiva, válida y fiable. Tradicionalmente, ha existido una dicotomía entre dos paradigmas: positivista e interpretativo. Además, está el paradigma socio-crítico introducido por la Escuela de Frankfurt. El paradigma positivista tiene como finalidad describir, explicar, controlar y predecir. Mientras que el paradigma interpretativo o fenomenológico pretende describir y comprender. Por su parte, el socio-crítico defiende que la investigación educativa no puede ser neutral, exigen al investigador un proceso de participación y colaboración desde la autorreflexión crítica de la acción.

A grandes rasgos, nuestra investigación se ubica dentro del paradigma interpretativo. En particular, estamos ante una investigación de diseño “design research” con métodos cualitativos aplicados al análisis de datos de clase.

Se planifican secuencias formativas que implican el diseño de tareas, su implementación efectiva y el análisis retrospectivo de la experiencia. Asimismo, tras cada implementación, el investigador realiza un proceso de reflexión iterativa que le permite re-adaptar el diseño inicial (Cobb, Jackson y Dumlap, 2016)

El carácter cualitativo que representa al paradigma interpretativo busca profundizar en la investigación, planteando diseños abiertos desde la globalidad y la contextualización. Algunas de las técnicas de recogidas de datos son: la observación participativa, entrevistas, diarios, cuadernos de campo, etc. Tanto las conclusiones como la discusión que generan las investigaciones que se encuadran dentro de este paradigma están ligadas fundamentalmente a un escenario educativo concreto contribuyendo también a comprender, conocer y actuar frente a otras situaciones.

La investigación de diseño persigue contribuir al proceso de enseñanza-aprendizaje de un cierto contenido. Pretende comprender y mejorar la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales en toda su complejidad, y del desarrollo y análisis paralelo de un diseño instruccional específico (Molina, Castro, Molina, Castro, 2011). Se nutre de un amplio campo multidisciplinar que incluye antropología, sociología y didácticas específicas. Existe una fuerte interdependencia entre la investigación y el diseño instruccional. Por ello, la persona que actúa como docente debe estar completamente implicada en la investigación (en nuestro caso será la investigadora principal).

Las investigaciones de diseño generan contribuciones en dos dominios: el diseño de una secuencia didáctica y la estructura del contenido de aprendizaje (Prediger, 2019). El segundo aspecto tiene relación con qué tipo de preguntas son las que responde el diseño instruccional, es decir, qué oportunidades de aprendizaje surgen en el desarrollo.

El objetivo es explicar por qué el diseño instruccional mejora y sugerir formas mediante las cuales puede ser adaptado a las nuevas circunstancias. Se busca un producto que puede ser teórico o de otra índole, por ejemplo, un conjunto de tareas.

El foco de atención de la investigación puede ser variado: la evolución de las interacciones de los alumnos en el aula, el desarrollo del aprendizaje de un concepto, etc. El análisis final permitirá extraer información sobre el diseño instruccional que sirva de guía a otros diseños.

3.3. Contexto y experimento de enseñanza

Para llevar a cabo la secuencia y la correspondiente recogida de datos, se ha elegido un grupo de cuarto curso del Grado de Magisterio en Educación Primaria del Centro de Estudios Superiores CES Don Bosco (adscrito a la Universidad Complutense de Madrid). En concreto, el grupo es el que estudia la modalidad bilingüe y está formado por 22 alumnos. De estos, un alumno que es de segunda matrícula no tendrá presencia en el aula. Por ello, la muestra está formada por 21 alumnos. En este estudio, la profesora es a su vez investigadora.

Antes de realizar el experimento, todos los alumnos participantes firmaron una autorización de grabación (Anexo I). Por otra parte, en la presentación del estudio asignamos nombres ficticios para los alumnos a fin de garantizar el anonimato.

Durante el curso 2018-2019 llevamos a cabo un taller piloto y una encuesta tras el taller que se detallan en el apartado 4.4. Como consecuencia de la revisión bibliográfica y las conclusiones obtenidas de este taller, se diseñó la secuencia didáctica formada por cuatro problemas. Además, resultó la sistemática de planificación, implementación y evaluación. Durante el curso 2019-2020 llevamos a cabo un segundo taller piloto y repetimos la misma encuesta. Se detalla en el apartado 4.5. Como consecuencia de esta segunda experiencia, se realizaron modificaciones en los enunciados y en el formato de los cuatro problemas y se modificaron las herramientas de anticipación “árbol del problema”.

Los propios alumnos, en ambas pruebas piloto, afirmaron que preferían trabajar en parejas y que comunicar los resultados mejoraba el uso del vocabulario geométrico y su comprensión. Así, los alumnos se agrupan en diez parejas según afinidades personales. Hay una persona que trabaja sola durante todo el taller.

El taller se desarrolla durante el mes de noviembre de 2019. Se estructura en cuatro sesiones dobles, con una duración total de una hora y 50 minutos. Previo a la realización del taller, ya se había iniciado la unidad didáctica “Movimientos en el plano”. Habiendo tenido lugar:

- Varias sesiones en las que se definieron los conceptos de traslación, giro, simetría y simetría deslizante, trabajando con material manipulativo y mediante un aprendizaje por descubrimiento.
- Dos sesiones dobles: una en el aula de informática y una discusión en gran grupo. El objetivo de ambas fue la familiarización del grupo con la herramienta y con la metodología. Ya habían trabajado con la herramienta en el curso anterior del Grado, pero no podemos considerar que el nivel de instrumentalización general del grupo sea alto.

3.4. Metodología para el diseño de los problemas de la secuencia didáctica

En el marco teórico se ha justificado la relevancia del tema de las transformaciones rígidas en el plano. La secuencia didáctica está formada por cuatro problemas, el último de corte didáctico. En los cuatro problemas, están involucrados los conceptos de translación, giro y simetría.

Las isometrías forman parte del programa GeoGebra y están tratadas de forma intuitiva. En este tema, la geometría dinámica puede tener un papel crucial en la generación de procesos de visualización de los alumnos y en su aprendizaje. Por otro lado, desde el punto de vista de la interacción, es suficientemente abierto y abstracto como para crear discusión en el grupo y que no se generen situaciones de acuerdo fácilmente.

Los tres primeros problemas son de aplicación de conocimientos adquiridos en sesiones previas. Se encuentran ubicados en la cuarta etapa del acto didáctico (Fernández-Bravo, 2019) en la que el alumno debe ser capaz de generar la identificación de un concepto y aplicarlo correctamente a una situación novedosa. Una de las conclusiones que se obtuvo en la prueba piloto realizada durante el curso anterior es que el nivel de instrumentalización del alumnado es bajo, por lo que previamente se ha trabajado con la herramienta durante cuatro sesiones.

Para llevar a cabo de una forma sistemática la anticipación de los problemas planteados se ha creado un instrumento que llamamos “árbol del problema”. Consiste en una estructura en forma de árbol, donde las ramas muestran diferentes estrategias que el alumno podría seguir para abordar la solución del problema, ya sean correctas o incorrectas (Morera, 2013). Se presenta el instrumento en el apartado 3.5.1.

La profesora utilizará el “árbol del problema” para guiar la resolución de los tres primeros problemas, tanto en el trabajo en parejas en el aula de informática como en las discusiones en gran grupo. En todo momento hará conscientes a los alumnos de ello.

Presentamos los enunciados de los problemas y la justificación correspondiente. Según González-López (2001), el aprendizaje con un SGD está basado en la resolución de problemas mediante exploración y conjetura.

PROBLEMA 1:

Una empresa ha diseñado un juego para niños que permite armar figuras como el dibujo siguiente.

Figura 3 Para construir en el problema 1

Construye la figura anterior, aplicando un giro, una traslación, una simetría y una simetría deslizante a las piezas siguientes, según corresponda.

Señala en cada pieza, mediante un cuadro de texto, el nombre del movimiento que has aplicado y su(s) elemento(s).

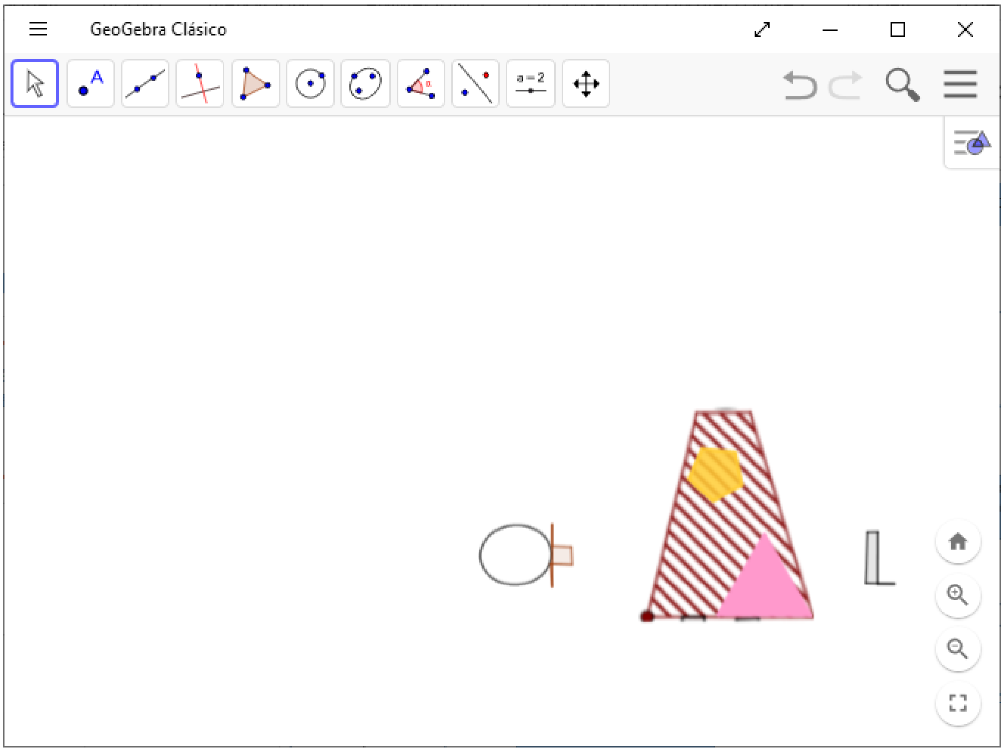


Figura 4 Piezas del problema 1

Según González-López (2001), las actividades en las que se pide construir una determinada figura geométrica exigen al alumno hacer explícitas un mínimo de propiedades geométricas necesarias. El primer objetivo del problema es trabajar la elección y la construcción de movimientos rígidos. Además, deben identificar con su nombre cada uno de los elementos de los movimientos que han construido.

PROBLEMA 2:

A continuación, se muestra un plano con cuatro pupitres colocados para trabajar de manera colaborativa en parejas. Dado el pupitre de color negro, hemos aplicado diferentes movimientos, obteniendo el resto.

a) *Pintad de color azul la figura que sea una simetría axial del pupitre negro; de verde la que sea un giro; de rojo la que sea una traslación.*

b) *Escribid los argumentos en los cuales os habéis basado para la elección de los colores, en un cuadro de texto.*

c) *Para el que sea simetría, construid el eje de simetría que transforma el pupitre negro en el azul.*

d) *Para el que sea giro, representad el centro de giro mediante un punto.*

e) *Para el que sea traslación, construid el vector de traslación.*

f) *Escribid detalladamente los pasos para las construcciones, en otro cuadro de texto.*

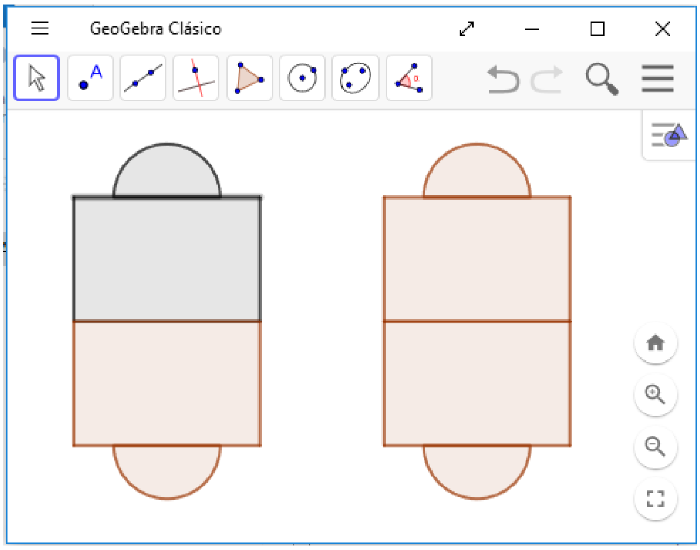


Figura 5 Pupitres problema 2

Este problema tiene como objetivo trabajar la identificación visual de las isometrías y la identificación y la construcción de los elementos esenciales de las transformaciones en el plano, dadas dos figuras homólogas. Es una actividad para la exploración, conjetura y demostración experimental (González-López, 2001). La actividad exploratoria corresponde a arrastrar por la pantalla del sistema los elementos libres en la construcción geométrica y observar los invariantes que se producen. Así se constatan determinadas propiedades y se elaboran conjeturas. El SGD sirve para hacer una comprobación experimental, ya que se evidenciará la falsedad de la conjetura si encontramos un contraejemplo; pero si la conjetura es cierta observaremos que se cumple para todas las posiciones, lo cual no constituye una prueba formal, ni tampoco podemos esperar que la simple constatación visual sea un elemento motivador o inspirador de dicha prueba. Más bien, al contrario, puede construir un obstáculo dado que los alumnos no perciben la necesidad de demostrar algo visualmente evidente. Es conveniente que la profesora clarifique estos términos, por ello en el último problema de la secuencia sí se hace necesaria una demostración formal.

Otro objetivo del problema que, si bien no se pide explícitamente en el enunciado está implícito debido al uso de la tecnología que se requiere, es trabajar la precisión y la justificación de las identificaciones realizadas de forma visual.

PROBLEMA 3:

En la figura se muestra un fragmento de un recubrimiento del plano, elaborado por M.C. Escher.

Se han marcado tres peces con las letras F, G, H.

a) *¿Qué movimiento rígido hace coincidir F con G?*
b) *¿Qué movimiento rígido hace coincidir F con H?*
c) *¿Qué movimiento rígido hace coincidir H con G?*

En cada uno de los apartados:

i. *Explicad, en un cuadro de texto, cómo habéis llegado a la conclusión de que se trata de ese movimiento.*
ii. *Construid los elementos esenciales el movimiento (centro, vector o eje).*

Figura 6 Fragmento de recubrimiento de recubrimiento del plano

(Escher, 1955)

En este caso, el objetivo es la identificación visual de las isometrías, en una representación no dinámica. Los alumnos deben buscar nuevas estrategias, diferentes a las del problema anterior para la identificación y la construcción de los elementos esenciales.

La última actividad de la secuencia, es una actividad con objetivos de aprendizaje didáctico. Los estudiantes del Grado de Magisterio de Primaria han de adquirir competencias para enseñar.

PROBLEMA 4

En esta ocasión, los alumnos encontrarán el siguiente documento Word en la actividad del Campus Virtual.

PROBLEMA 4

El siguiente applet sobre giros y traslaciones, ha sido diseñado para estudiantes de primaria con edades comprendidas entre 6 y 8 años (Primero, Segundo o Tercero de Primaria):

https://www.geogebra.org/m/Vu4gP2tG#material/drj8ZQxS

Elegid un curso, entre los tres posibles y *elaborad,* ***a partir del applet anterio****r, un desafío sobre contenidos matemáticos adecuados al nivel del curso.*

a) *CURSO ELEGIDO:*
b) *Redactad el desafío:*
c) *Según el Decreto Currículo de la Comunidad de Madrid, los contenidos y estándares de aprendizaje evaluables asociados a Orientación Espacial de los cursos son los siguientes. Subrayad los estándares de aprendizaje evaluables concretos que se pueden aplicar a vuestro desafío.*

1º Primaria

Orientación espacial. Situación en el plano y en el espacio.
34. Localiza partes del propio cuerpo y describe la posición de objetos del entorno respecto de uno mismo o de otro ser u objeto, utilizando descriptores: delante/detrás, arriba/abajo, derecha/izquierda, encima/debajo, etcétera.
35. Coloca un objeto o se coloca él mismo en una determinada posición, para situarlo o situarse delante o detrás, a la derecha o a la izquierda, encima o debajo de otro objeto o ser diferente.
36. Ejecuta consignas dadas en términos de hacia delante/hacia atrás, hacia arriba/hacia abajo, hacia la derecha/hacia la izquierda, en ejercicios psicomotores variados: mirar, girar, caminar, etcétera.

37. Describe y reconoce situaciones de un objeto respecto de otro: delante/detrás de, a la derecha/izquierda de, encima/debajo de.

2º Primaria

Orientación espacial. Situación en el plano y en el espacio.
31. Reconoce de un objeto, cuando las hay, su parte de delante/detrás, de arriba/abajo, de la derecha/izquierda.
32. Describe y dibuja recorridos de caminos sobre una red cuadriculada, utilizando de forma combinada las direcciones: arriba, abajo, derecha e izquierda.
33. Indica con precisión (subir/bajar, girar a la derecha/izquierda...) la forma de llegar de un lugar a otro en las dependencias escolares.
Rectas paralelas y perpendiculares. Elementos de un polígono. Construcción de triángulos y rectángulos.
34. Clasifica las líneas en rectas, curvas, mixtas y poligonales y busca ejemplos en objetos del entorno.
35. Asocia el concepto de punto con la intersección de dos líneas o con una posición en el plano.
36. Reconoce, entre una serie de figuras, las que son polígonos y los nombra según su número de lados.
37. Utiliza con propiedad los conceptos de lado y vértice en un polígono e identifica el número de lados y vértices de un polígono dado.

3º Primaria

Orientación espacial. Sistema de coordenadas cartesianas.
48. Describe recorridos representados sobre una cuadrícula, precisando direcciones, sentidos y distancias.
49. Localiza puntos y cuadraditos sobre cuadrícula con una referencia ortonormal, utilizando coordenadas cartesianas.
Ángulos y su clasificación. Construcción de triángulos y cuadriláteros.
50. Identifica y define ángulo recto y grado, y clasifica los ángulos en agudos rectos, obtusos, llanos, mayores de 180° y completos.
51. Relaciona el concepto de ángulo con el de giro.
52. Utiliza transportador y regla para medir y reproducir un ángulo dado.
53. Distingue las posiciones relativas de rectas en el plano: paralelas y secantes (perpendiculares y oblicuas).
54. Reconoce, describe, nombra y reproduce (con regla y escuadra o a mano alzada) figuras geométricas: cuadrado, rectángulo, rombo, trapecio y triángulos equiláteros, rectángulos e isósceles.

Completad la siguiente rúbrica que se utilizará para la corrección de la primera parte de la actividad.

Tabla 2 Primera rúbrica del problema 4

	SÍ	NO
¿Es necesario utilizar el applet para la resolución?		
¿El lenguaje es adecuado?		
¿Está en consonancia con el nivel del curso elegido?		
¿Se corresponde con los contenidos del currículo del curso que han sido subrayados?		

Elaborad un árbol del problema para el "desafío planteado". (Se entrega en papel).

Completad la siguiente rúbrica que se utilizará para la corrección de la segunda parte de la actividad.

Tabla 3 Segunda rúbrica del problema 4

	SÍ	NO
¿Representa un proceso lógico para la resolución del problema planteado?		
¿Tiene en cuenta tanto las respuestas correctas como las incorrectas?		
¿Para las respuestas incorrectas, incluye preguntas o comentarios para redirigir el proceso de resolución?		
¿Para las correctas, incluye preguntas de ampliación?		
¿Está abierto a la posibilidad de crear nuevas ramas en distintas intervenciones?		

El applet al que enlaza el enunciado de la actividad es el siguiente:

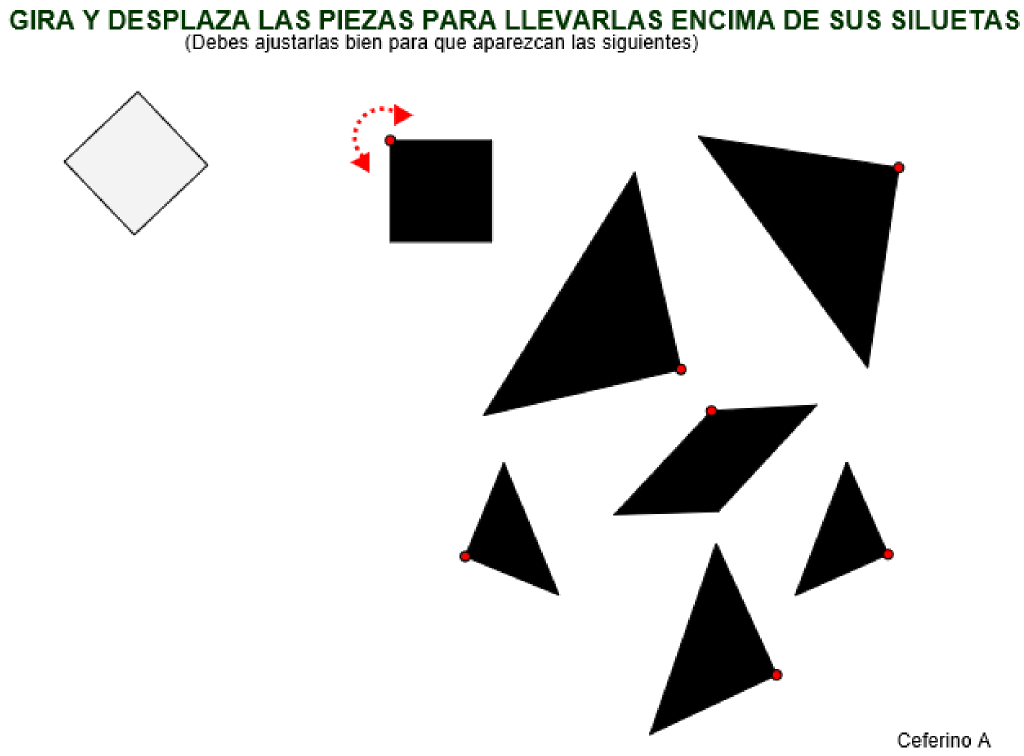


Figura 7 Applet sobre giros y traslaciones

Aplicando el arrastre para mover las piezas del tangram cuyo interior es negro, situadas en la zona derecha de la figura 7 Se obtiene la figura 8.

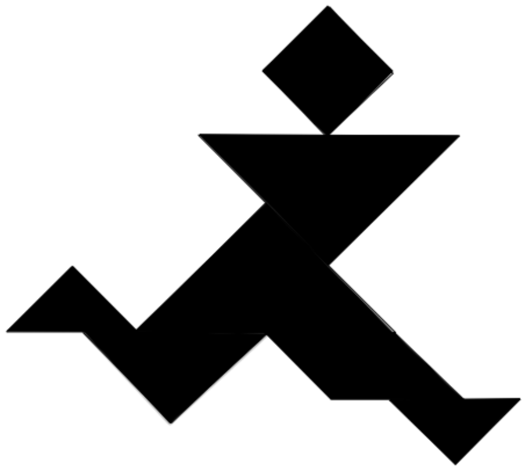


Figura 8 Resultado tras aplicar giros y traslaciones

El objetivo de esta última actividad de la secuencia es la elaboración por parte de los alumnos de un instrumento didáctico, para la planificación y la implementación en una clase de Educación Primaria. De manera trasversal, está actividad toca el currículo (Comunidad de Madrid, 2014) exigiendo que las preguntas que los alumnos planteen estén en relación con los contenidos del curso elegido.

3.5. Metodología para la planificación e implementación de la secuencia didáctica

En este apartado detallaremos la metodología utilizada para la consecución del primer objetivo. Recordamos que dicho objetivo consiste en analizar una sistemática de planificación, implementación y evaluación de una secuencia didáctica mediante discusiones en gran grupo bajo el soporte de GeoGebra.

En relación a la parte de planificación, se ha creado la secuencia de problemas que hemos presentado en el apartado anterior. Los tres problemas se encuentran dentro de la cuarta fase del acto didáctico, que es aplicación de conocimientos adquiridos (Fernández-Bravo, 2019). El diseño se ha basado en algunas de las ideas introducidas por González-López (2001) que elabora una clasificación sobre los tipos de actividades dinámicas que se pueden realizar utilizando un SGD. En el grado de Magisterio en Educación Primaria se incide en la importancia de las competencias didácticas del futuro maestro, por ello se ha introducido el problema 4 en nuestro estudio.

Por otro lado, consideramos que la parte de implementación es algo más que la mera puesta en práctica de los problemas en clase con los alumnos. Hace falta un trabajo previo de planificación para que su ejecución sea lo más efectiva posible (Stein, Engle, Smith y Hughes, 2008; Tyminski, Zambak, Drake y Land, 2014). Forma parte del desarrollo profesional del docente, y como tal, implica procesos de formación prolongados y la inclusión de aprendizaje y reflexión constante sobre el propio desempeño (Martínez y González, 2014).

Morera (2013) define *sistemática* como una serie de acciones que el profesor lleva a cabo en la planificación e implementación de las discusiones en gran grupo con el uso de la tecnología. Basándose en la mirada conjunta de las fases de orquestación de discusiones en gran grupo propuestas por Smith y Stein (2018) y las fases de orquestación instrumental propuestas por Drijvers et al., (2010), plantea una adaptación metodológica de estos conceptos teóricos para alumnos de 3º ESO. Nosotros adaptamos esta metodología a estudiantes de Grado de Magisterio de Educación Primaria. Las fases son ocho, provienen de la literatura que ha sido introducida en los apartados 2.1.1 y 2.2.1 del marco teórico.

1. **Anticipación**: Para el desarrollo de esta fase, se ha creado un instrumento denominado árbol del problema (Morera, Souto y Arteaga, 2011). Lo presentamos detalladamente en la sección 3.5.1.

2. **Configuración didáctica:** En esta fase tiene lugar la decisión previa a la aplicación de la sistemática en clase de qué instrumentos van a entrar en juego, lo cual ayuda a la gestión posterior y revierte en la riqueza de la puesta en común. No solo se centra en los artefactos o instrumentos tecnológicos, sino también en los que podríamos considerar tradicionales, como la pizarra.

   Cuando Trouche (2004) presenta este concepto teórico lo ve desde un punto de vista descriptivo de una situación a posteriori, para caracterizar las prácticas con tecnología. Sin embargo, Morera (2013) lo ubica en la segunda posición de la sistemática, con la intención de reforzar la idea de que con la decisión de los artefactos que van a entrar en juego se está haciendo una gestión significativa, basada en cómo entiende el profesor la gestión del aprendizaje.

3. **Modo de explotación:** Morera (2013) realiza la adaptación metodológica del concepto de Trouche (2004). Para llevar a la práctica esta fase, nos ayudaremos del árbol del problema previamente diseñado. En esta fase planteamos el modo de explotación de la discusión en gran grupo para que lleguen lo más lejos posible en el itinerario del árbol.

4. **Monitorización:** En esta fase se inicia la ejecución del trabajo con alumnos, aunque sin entrar en la discusión en gran grupo. Los alumnos trabajarán previamente en el problema sobre el que más adelante se va a hacer la puesta en común.

   Conviene realizar una buena monitorización del trabajo previo de los alumnos, para fomentar la interacción entre los estudiantes y para que las indicaciones del profesor no se limiten a las producciones originales que podrían hacer los alumnos, sino que ayuden a potenciarlas y completarlas (Morera, 2013). Hay que tener en cuenta que la profesora debe estar pendiente diez parejas y una persona que trabaja individualmente. Por ello, no es sencillo situarse en cada ocasión y dar la información o la ayuda necesaria. El árbol del problema es un instrumento que permite tener un esquema visual de la globalidad de posibles enfoques de la resolución del problema, o posibles grados de profundización. Así la profesora puede situar con agilidad el punto del árbol en el que se encuentra cada pareja y disponer de propuestas de mensajes a utilizar para acompañar a los alumnos.

5. **Selección:** En esta fase la profesora lleva a cabo la selección de las parejas que inician la discusión en gran grupo. Para ello, tiene que ser consciente del trabajo realizado previamente por la pareja. Utiliza como criterios la propia observación durante la fase de monitorización y la revisión del trabajo realizado por los alumnos.

   Dependiendo de la naturaleza del problema y de las estrategias trabajadas puede ser más interesante seleccionar a alumnos que no hayan profundizado tanto en la solución, para que las intervenciones sucesivas consigan completar. En cambio, en otras situaciones, puede interesar seleccionar a alumnos que hayan trabajado la solución de manera correcta para que las intervenciones se dirijan a profundizar en otros aspectos o en la comparación de heurísticas (Morera, 2013).

Las fases siguientes son de una naturaleza distinta a las anteriores, ya que tienen lugar durante las sesiones de discusión en gran grupo. Cuanto más se hayan preparado estas sesiones previamente, más control se tendrá sobre su desarrollo.

6. **Implementación didáctica:** No se puede hacer una planificación exacta de esta fase, por sus características intrínsecas. En cambio, sí se puede hacer una planificación con los aspectos más importantes a tener en cuenta.

Con una visión a posteriori sí que podríamos mostrar cuál ha sido la implementación didáctica llevada a cabo en cada caso. Para ello utilizaremos una herramienta llamada *'Detector de oportunidades de aprendizaje'* que detallamos en el apartado 3.6.2.

7. **Secuenciación:** Morera (2013) propone unos estadios que el profesor puede tener en cuenta para llevar a cabo la secuenciación de las puestas en común de los problemas, se han presentado en el apartado 2.3 del marco teórico. Estos estadios surgen al crear el instrumento '*Detector de oportunidades de aprendizaje'.*
8. **Conexión:** Nos referimos tanto a la conexión entre las diferentes estrategias planteadas en la resolución del problema como a conexiones con otros aspectos matemáticos, o incluso otras materas.

3.5.1. Árbol del problema. Instrumento complementario para la anticipación.

Este instrumento se crea para llevar a cabo la fase de anticipación de una forma sistemática. Representa el proceso lógico del pensamiento en un diagrama de flujo. Consiste en una estructura esquemática, en forma de árbol en el que las ramas muestran las diferentes estrategias que el alumno podría seguir para la resolución del problema (Morera, 2013). No es un camino cerrado de tipo algorítmico que prive de libertad de acción al profesor. Es un sistema dinámico que debe actualizarse tras cada intervención en clase.

Se ha realizado un árbol para cada uno de los problemas. A continuación presentamos, a modo de ejemplo, el árbol relacionado con el segundo problema de la secuencia didáctica. El resto de árboles se encuentran en el apartado 5.1.1. Anticipación (figura 41 y figura 42).

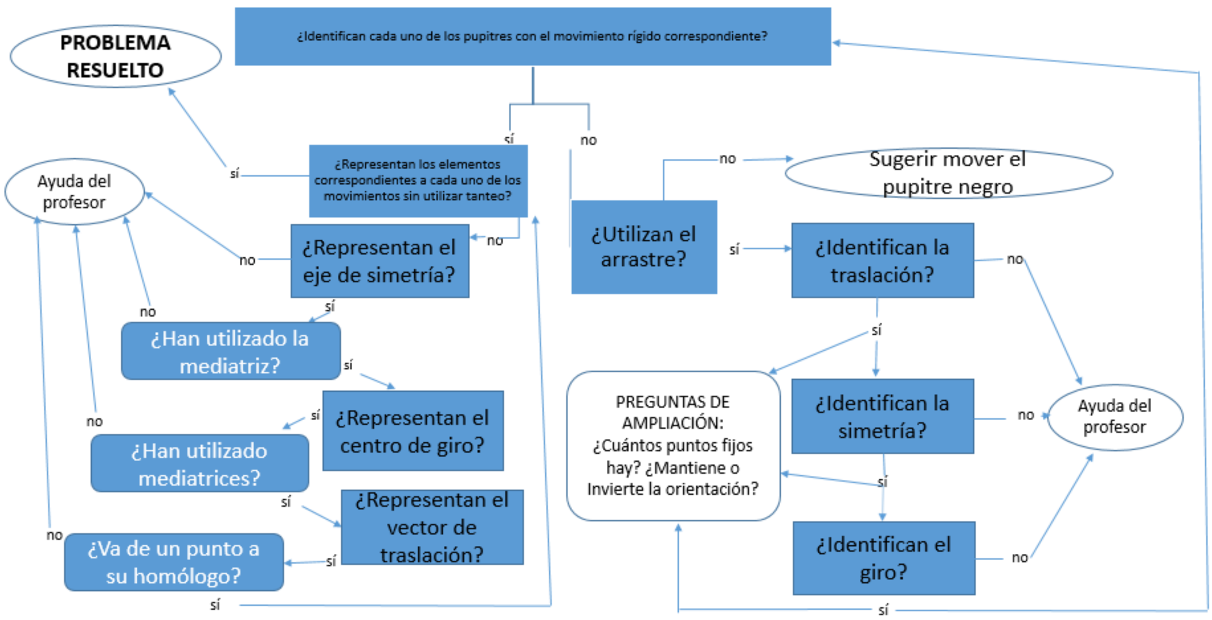


Figura 9 Árbol del problema 2

Si los alumnos asocian el color correspondiente a cada uno de los elementos del dibujo, según indica el enunciado, significa que han identificado cada uno de los pupitres con el movimiento rígido correspondiente. Además, el problema tiene otro objetivo que es representar los elementos asociados a cada uno de estos movimientos (eje de simetría, centro de giro y vector de traslación).

En primer lugar, nos fijamos en si son capaces de cambiar el color según se indica. Si no lo son, podemos pensar que sea un problema de instrumentalización del SGD por lo que conviene previamente haber realizado actividades en las que se hayan adquirido este tipo de conocimientos del software. En el caso de la dificultad haya sido identificar cada figura con el movimiento que hace que la negra se transforme en ella, comprobamos si están utilizando el arrastre. Si no utilizan el arrastre, sugerimos que lo hagan. En algunos casos los alumnos no asociarán correctamente cada figura con su movimiento, pero se autocorregirán al tratar de construir los elementos.

Cuando han sido capaces de identificar cada uno de los pupitres con su color correspondiente, el árbol sugiere preguntas para hacer a los alumnos conscientes de cuáles son las características de estos movimientos. A continuación, veamos si encuentran cada uno de los elementos asociados. Hemos decidido no pedir el ángulo de giro, consideramos suficiente que los alumnos sean capaces de encontrar como elemento el centro de giro, aunque se guiará la discusión en gran grupo a preguntarnos por el ángulo.

El orden en el que se presenta en la rama del árbol el dibujo de cada uno de los elementos no es casual. En primer lugar, aparece eje de simetría porque la comprensión del concepto línea recta es más sencilla que los otros, al ser algo de dimensión 1 y con lo que están acostumbrados a trabajar desde que eran estudiantes de Educación Primaria. Centro de giro se encuentra en segundo lugar porque es un punto, que no tiene dimensión y la idea es más abstracta. El último elemento es el vector de la traslación, pues se trata de un elemento geométrico que algunos estudiantes de grado de Magisterio desconocen, de hecho en numerosas ocasiones lo confunden con segmento. Es conveniente además, detenerse en que este elemento se puede situar en cualquier lugar del espacio, ya que queda definido por su módulo, dirección y sentido.

Queremos que los alumnos no utilicen el arrastre por tanteo, por ello en el árbol queda constancia de que deben utilizar los procedimientos adecuados para encontrar los elementos de cada uno de los movimientos rígidos.

Cuando han identificado cada uno de los tres pupitres con el color correspondiente y han representado el eje de simetría, centro de giro y vector de traslación, el problema está resuelto.

3.6. Metodología para la evaluación de la secuencia didáctica

Una vez finalizada la secuencia didáctica, podemos evaluar la efectividad de la instrucción para ver si se ha implementado con éxito. Recordamos que nuestro primer objetivo es el análisis de la sistemática de la secuencia didáctica con discusiones en gran grupo bajo el soporte GeoGebra. No obstante, consideramos que realmente se obtendrán indicios de productividad matemática mediante la detección de oportunidades de aprendizaje y su aprovechamiento.

Usamos el instrumento TRU-Math (Teaching for Robust Understanding of Mathematics), desarrollado por el Grupo Mat de la Universidad de California en Berkeley (UC), liderado por Schoenfeld (2013) con un sistema de rúbricas que permite medir mediante tres niveles la instrucción de una clase de matemáticas.

La aplicación de este instrumento puede dar información de qué aspectos son mejorables para que la secuencia didáctica llegara a ser más productiva.

Nuestro segundo objetivo es detectar oportunidades de aprendizaje, así como su aprovechamiento. Por este motivo, una vez aplicado el instrumento TRU-Math aplicaremos el instrumento ‘Detector de oportunidades de aprendizaje’ diseñado a tal efecto por Morera, Planas y Fortuny (2013) que nos permite realizar un análisis minucioso y en profundidad de las discusiones en gran grupo. Para comprobar si la discusión en gran grupo ha sido realmente productiva buscaremos evidencias de que las oportunidades de aprendizaje detectadas han sido aprovechadas por los estudiantes. Nuestro instrumento para ello son las técnicas de evaluación de la asignatura.

3.6.1. Esquema de la enseñanza para un entendimiento de las matemáticas robusto (TRU-Math)

El instrumento de análisis TRU-Math consiste en un sistema de rúbricas que se aplica a cada uno de los elementos de una matriz formada por dos variables: la estructura de las actividades realizadas en clase y las dimensiones que se proponen como necesarias y suficientes para observar una clase. Fue presentado por Schoenfeld (2013).

La estructura de las actividades realizadas en clase se divide en las siguientes parcelas:

a) *Planteamiento:* el profesor propone una tarea y estructura la clase.
b) *Exposición:* Estilo magistral de lección, tanto para realizar alguna introducción como para resumir.
c) *Discusión en gran grupo:* Entre todos los participantes se discute sobre una tarea.
d) *Trabajo en grupos reducidos*: Los participantes trabajan en grupos reducidos.
e) *Presentaciones de los estudiantes:* Los alumnos exponen delante del resto de los estudiantes.

f) *Presentación de confusiones o ideas erróneas de los estudiantes*: tanto el profesor como los alumnos tratan ideas erróneas.

En la versión final del documento de Schoenfeld (2013), las estructuras que se tienen en cuenta se reducen a cuatro pero para nuestro propósito hemos preferido utilizar la clasificación precedente.

La segunda variable de la matriz son las diferentes dimensiones necesarias y suficientes para hacer observaciones en clase y poder ver si las discusiones son productivas. Schoenfeld (2013) presenta cinco dimensiones. En nuestro caso, hemos añadido una dimensión más que hace referencia al aprendizaje didáctico, que consideramos fundamental en la formación de futuros maestros de primaria. Para el análisis de esta dimensión nos fijaremos fundamentalmente en el PROBLEMA 4.

A continuación, se presentan las seis dimensiones:

a) Matemáticas: La puntuación refleja las oportunidades de los alumnos para el aprendizaje de contenidos y prácticas matemáticas importantes.

b) Demanda cognitiva: Se mide hasta qué punto las actividades y su puesta en práctica crean y mantienen un constante reto intelectual.

c) Acceso: Valora la estructura de la clase invita y da soporte a una participación activa por parte de todos los alumnos de la clase.

d) Organismo: autoridad y responsabilidad. Muestra si el entorno de clase brinda la oportunidad a los estudiantes de hacer conjeturas, explicaciones y argumentaciones (autoridad), adecuándose responsablemente a las normas de clase.

e) Uso de la evaluación. Grado en el que los razonamientos de los estudiantes son recibidos, retados y refinados.

f) Aprendizaje didáctico. Mide

g) el grado en el que la secuencia se focaliza en la mejora de las actitudes didácticas de los estudiantes.

En la siguiente tabla se muestran los diferentes niveles del sistema de rúbricas para poder realizar el análisis de cada una de las estructuras consideradas.

Tabla 4 Niveles del instrumento TRU-Math

Nivel	**Matemáticas**	**Demanda cognitiva**	**Acceso**	**Organismo: autoridad y responsabilidad**	**Uso de la evaluación**	**Aprendizaje didáctico**
1	Foco en las capacidades, poca atención en hacer notar los conceptos, conexiones o prácticas matemáticas.	La memorización es el procedimiento básico para aprender los contenidos.	No hay un esfuerzo aparente para mejorar el acceso y hay claros patrones desiguales de participación de los estudiantes.	El profesor plantea la información y valora el trabajo de los estudiantes.	No hay evidencias de recoger o usar los razonamientos de los alumnos.	No se pone atención a la didáctica o está ausente.
2	Se pone más atención en los conceptos y en las conexiones matemáticas pero sigue dándose una mínima importancia a las prácticas matemáticas.	Los estudiantes tienen oportunidades para hacer conexiones o para involucrarse en prácticas, pero mucha parte del reto está acompañado por una guía estricta.	Se ven algunos esfuerzos para invitar a otros estudiantes a participar.	Los estudiantes tienen un tiempo para explicar, pero en general tienen un rol reactivo. E profesor sigue siendo la autoridad.	Se obtienen los razonamientos de los estudiantes o se hace referencia a ellos y se corrigen cuando cometen errores.	Se da una importancia mínima a las prácticas didácticas.
3	Se pone más atención en los conceptos y conexiones, con la oportunidad de desarrollar prácticas matemáticas.	Las pistas o el andamiaje del profesor promueven una lucha productiva por parte de los estudiantes para construir el aprendizaje y participar en prácticas matemáticas.	Hay claros esfuerzos para invitar y ayudar a participar a todos los estudiantes.	Se anima a los alumnos a explicar y responder a las ideas matemáticas. Se puede oír la voz de los estudiantes.	Se tienen en cuenta los razonamientos de los estudiantes y se discuten, a veces afectando a la estructura de la clase preparada de antemano.	Se pone atención en lo relativo al aprendizaje didáctico del tema matemático que se trata.

En una tabla de doble entrada puede observarse la estructura final del instrumento. Los datos serán valores entre 1 y 3 en cada uno de los apartados. Esta representación será útil para ver a grandes rasgos si se puede valorar positivamente la secuencia que se está analizando y permite ver sus puntos débiles. Las sesiones se grabarán y serán analizadas a posteriori por la profesora/investigadora.

Tabla 5 Estructura del instrumento TRU-Math

	Matemáticas	**Demanda cognitiva**	**Acceso**	**Organismo: autoridad y responsabilidad**	**Uso de la evaluación**	**Aprendizaje didáctico**
Planteamiento						
Exposición del profesor						
Discusiones en gran grupo						
Trabajo en grupos reducidos						
Presentaciones de los estudiantes						
Presentación de confusiones o ideas erróneas.						

Esta estructura es un instrumento general, pero el mismo Schoenfeld (2013) comenta que se necesitan examinar con detalle los aspectos a analizar. Propone una subdivisión siguiendo una estructura de rúbricas. En nuestro caso, es preciso hacer un estudio más detallado de las puestas en común. Para ello usamos el instrumento que se presentan a continuación, creado por Morera, Planas y Fortuny (2013)

3.6.2. Detector de oportunidades de aprendizaje de una discusión en gran grupo con tecnología

El instrumento 'Detector de oportunidades de aprendizaje' fue diseñado y validado por Morera, Planas y Fortuny (2013). Su propósito principal es analizar en profundidad las discusiones en gran grupo, organizando los datos y toda la información que se desprende de ellos y, al mismo tiempo, obtener información detallada sobre qué ocurre durante la discusión.

Atendiendo a las discusiones en gran grupo, debemos tener en cuenta la complejidad de los datos: las sesiones de puestas en común de esta investigación son dobles y duran una hora y 50 minutos. Además, intervienen muchas variables: la profesora, los estudiantes, los alumnos que participan activamente desde su asiento, los que salen a presentar las ideas al resto de compañeros, el tipo de problema de geometría que se está tratando, el entorno tecnológico, la pizarra digital… Todos estos elementos hacen que el análisis de las discusiones sea una tarea minuciosa y complicada. Es necesario dividir el instrumento en tres fases: para identificar y caracterizar episodios; para identificar y caracterizar las acciones de los participantes; para detectar y caracterizar las oportunidades de aprendizaje (Morera, 2013).

Identificando y caracterizando episodios

Nos centramos en los elementos susceptibles de influir en el aprendizaje de los estudiantes promoviendo el progreso en la adquisición de nuevos conceptos y procedimientos. Buscamos cambios cualitativos del pensamiento matemático en el transcurso de la participación en la discusión en gran grupo. Nos fijamos para ello en la interacción entre los participantes y en la influencia de la tecnología en el aula de matemáticas; así la orquestación instrumental del profesor (Ruiz, 2012) será también clave para la caracterización de los episodios.

Todas las acciones llevadas a cabo dentro de la discusión en gran grupo serán objeto de estudio, y por tanto pertenecerán a un episodio. La naturaleza de los episodios está caracterizada por dos elementos: tipos de orquestación y estadios de discusión (Morera, 2013).

El primer elemento está basado en los tipos de orquestación presentadas por Drijvers et al. (2010):

a) *Demostración técnica*: Exposición por parte del profesor de elementos técnicos de la herramienta.
b) *Explicación de la pantalla*: Explicaciones por parte del profesor, guiadas por lo que sucede en la pantalla.
c) *Conexión pantalla-pizarra*: Donde el profesor enfatiza la relación entre lo que ocurre en el entorno dinámico y su representación en un entorno estático.
d) *Discusión de la pantalla*: Discusión conjunta sobre lo que está ocurriendo en la pantalla.
e) *Descubrir y mostrar*: Identificación del trabajo realizado por un estudiante durante la preparación de la discusión y utilización de éste deliberadamente en gran grupo.
f) *Trabajo del sherpa*: Uno o varios alumnos utilizan la tecnología para presentar su trabajo delante del resto de participantes o para responder a cuestiones del profesor.

El otro elemento en el que se basa la caracterización de los episodios es la secuencia de estadios de discusión, que han sido presentados y detallados en el apartado 2.3. del marco teórico, aquí los recordamos.

a) *Situación del problema.*
b) *Presentación de una solución (argumentada).*
c) *Estudio de diferentes estrategias para resolver o argumentar.*
d) *Estudio de casos particulares o extremos.*
e) *Contraste entre diferentes soluciones*.
f) *Conexiones con otras situaciones*.
g) *Generalización y conceptualización*.
h) *Reflexión sobre el progreso matemático.*

Para identificar y caracterizar los episodios, dividimos la clase en segmentos y estudiamos mirando solo una dimensión, luego repetimos el procedimiento mirando la otra dimensión. Así, la intersección de estas dos particiones identifica los episodios que estarán caracterizados por un elemento de cada componente. Se presentan los episodios en una matriz 6x8. Los episodios van acompañados de un subíndice, que conserva el orden cronológico en el que se sucedieron (Morera et al., 2013).

Tabla 6 Tipos de orquestación y tipos de estadio en la discusión en gran grupo de un problema

(Morera et al., 2013)

DISCUSIÓN EN GRAN GRUPO	Situación del problema	Presentación de una solución (argumentada)	Estudio de las estrategias para resolver o argumentar	Estudio de casos particulares o extremos	Contraste entre diferentes soluciones	Conexiones con otras situaciones	Generalización y conceptualización	Reflexión sobre el progreso matemático	*(Tipos de estadio)*
Demostración técnica									
Explicación de la pantalla									
Conexión pantalla-pizarra									
Discusión de la pantalla									
Descubrir y mostrar									
Trabajo del Sherpa									
(Tipos de orquestación)									

Esta forma de representar los datos, junto con ordenar la información, aporta características tanto del grupo clase como del profesor. El hecho de que los episodios conserven el orden cronológico mediante subíndices, permite ver si la clase ha seguido el orden de los estadios, o si ha permitido que los alumnos avanzaran y retrocedieran en sus aportaciones. Por otro lado, Drijvers et al. (2010) señalan que los tres primeros tipos de orquestación están centrados en el profesor y los tres últimos en los estudiantes. Por lo que la matriz muestra si la discusión ha estado centrada en el profesor o en las acciones de los estudiantes.

Identificando y caracterizando oportunidades de aprendizaje matemático.

Una oportunidad de aprendizaje queda definida por las acciones que han intervenido en su creación y la explicación en cada caso de cómo la interacción de los participantes que han llevado a cabo las acciones ha generado la oportunidad. Así, una oportunidad de aprendizaje matemático es la combinación entre los contenidos del aprendizaje potencial y las acciones que propician la emergencia de estos contenidos (Morera, 2013).

Morera et al. (2013) caracterizan las oportunidades de aprendizaje según tres tipos, según la orientación de sus acciones:

a) Orientada a *contenidos matemáticos específicos*. Oportunidad orientada a conocer un contenido matemático concreto, por ejemplo vector de traslación.

b) Orientada a diferentes *Estrategias.* Oportunidad orientada al aprendizaje de una estrategia, por ejemplo, la de aprender a conjeturar.

c) Orientada a actividades de *autorregulación*. Por ejemplo, aprender que es importante justificar las afirmaciónes que se hacen en clase.

Debido a las necesidades de nuestros alumnos, futuros profesores de Educación Primaria, añadimos un tipo más:

d) Orientada a *contenidos didácticos específicos*. Oportunidad orientada a conocer un contenido didáctico específico, por ejemplo árbol del problema.

Se identifican y caracterizan las oportunidades de aprendizaje de cada episodio, repetiremos el mismo procedimiento para cada uno de los episodios que forman parte de una discusión en gran grupo. Así, se pueden detectar las distintas oportunidades de aprendizaje matemático de la discusión.

3.6.3. Resumen de los instrumentos de recogida y análisis de datos

Los datos que se utilizan en el análisis de la sistemática se recogen a partir de la observación de la profesora, los documentos GeoGebra entregados a través del Campus después de cada taller y las grabaciones de las discusiones en gran grupo.

Para comprobar a grandes rasgos si se puede valorar positivamente la secuencia que se está analizando utilizamos el instrumento ‘TRU MATH’ (Schoenfeld, 2013) que es un sistema de rúbricas que analiza actividades llevadas a cabo en clase, según seis dimensiones.

Se hace necesario un análisis en profundidad de las discusiones en gran grupo, para lo que empleamos el instrumento ‘Detector de Oportunidades de Aprendizaje’ (Morera et al., 2013) adaptado a dos fases:

1º Estructuración en episodios basada en orquestación y estadios de discusión. Todas las acciones llevadas a cabo dentro de la discusión en gran grupo serán objeto de estudio y, por tanto, pertenecerán a un episodio.

3º Identificación, dentro de cada uno de los episodios, de las oportunidades de aprendizaje que pueden ser orientadas a contenidos matemáticos específicos, a estrategias o a autorregulación.

3.6.4. Metodología para evidenciar el progreso de los estudiantes

Tras la detección de las oportunidades de aprendizaje que aparecen es importante estudiar si estas han sido aprovechadas por los alumnos y se ha producido aprendizaje matemático. Para el presente estudio necesitamos evidencias del progreso.

Entre las técnicas de evaluación que se recogen en la guía docente y se pueden consultar en este estudio en el apartado 4.1.5. están: un caso práctico de aplicación de contenidos y un examen final. Ambas técnicas son evaluaciones para comprobar los aprendizajes individuales.

En cuanto al caso práctico, las siguientes cuestiones están relacionadas con la adquisición de ciertas oportunidades de aprendizaje que descubrimos en el análisis que se describe en el capítulo 6.

1º Señala la respuesta correcta

1.1 ¿Cuál es el ángulo de giro?

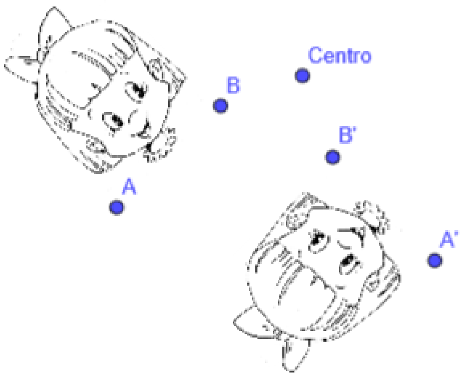


Figura 10 Ejemplo de giro

a) 270º
b) 90º
c) Depende de en qué sentido lo miremos.
d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

1.2 Fíjate en la imagen y selecciona la opción correcta.

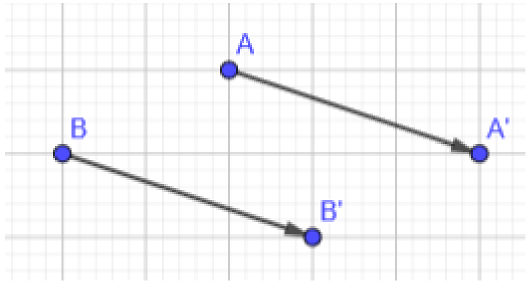


Figura 11 Vectores

a) A ambos puntos se les ha aplicado una traslación, pero de vectores distintos, aunque son paralelos.
b) No se ha aplicado ningún movimiento rígido en el plano porque las distancias cambian.
c) Se han trasladado A y B según el mismo vector.
d) El movimiento de la imagen invierte la orientación.

2º

Al siguiente cuadrilátero se le ha aplicado un movimiento rígido, como ves en la imagen.

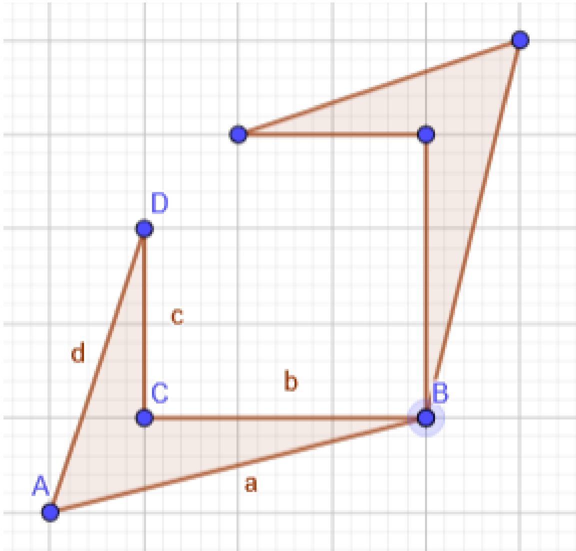


Figura 12 Movimiento rígido aplicado a un cuadrilátero

a) Nombra los vértices homólogos con A', B', C', D' según corresponda.

b) ¿El movimiento mantiene o invierte la orientación? ¿Cuál es el nombre del movimiento rígido?

d) <u>Representa aproximadamente el elemento que define al movimiento</u> (eje de simetría, centro de giro o vector de traslación). <u>¿Cómo se construye este elemento, sin tantear?</u>

Si nos fijamos en el caso práctico, se evalúa la adquisición de contenidos matemáticos específicos. Observamos que en la pregunta 1.2. la respuesta correcta es la *b. Se han trasladado A y B según el mismo vector* cuando los vectores representados son equipolentes, pero no se quiere ser demasiado formalista con el lenguaje matemático. Por otro lado, la parte que no es tipo test pide además explicar un proceso, lo cual servirá para evaluar la capacidad de expresarse con un lenguaje matemático correcto y de justificar mediante argumentos.

Por su parte, el examen final consta de las siguientes actividades relacionadas con los temas tratados en la secuencia didáctica diseñada para este experimento.

1º

1.1 ¿Qué movimiento surge de la composición de aplicar un giro y después una traslación?

a) Simetría.
b) Giro.
c) Simetría deslizante.
d) Depende de la posición del vector de traslación y del centro de giro.

2º

a) Resuelve la siguiente actividad, diseñada para el curso 5º de Primaria.

10 **Los siguienetes dibujos son tarjetas dobladas por su eje de simetria. Une cada una con la tarjeta que aparecerá al desplegarla.**

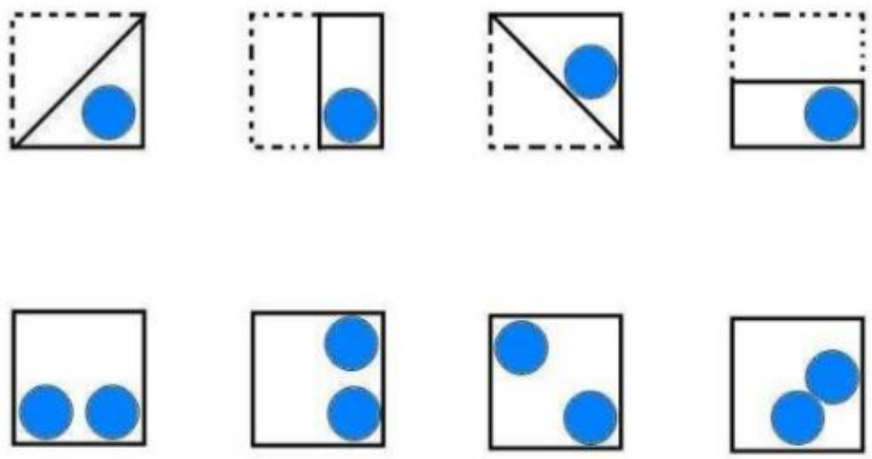


Figura 13 Actividad diseñada para 5º de Primaria

(López-Rodríguez, 2013)

b) En el siguiente extracto del Decreto Currículo de la comunidad de Madrid:

- *Subraya con una línea continua (____) el contenido presente.*
- *Subraya, utilizando puntos (….) los criterios de evaluación presentes.*
- *Subraya, utilizando línea discontinúa (_ _ _) el estándar de aprendizaje evaluable presente.*

Geometría

La situación en el plano y en el espacio. Sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimiento.

52. Interpreta y describe situaciones, mensajes y hechos de la vida cotidiana utilizando el vocabulario geométrico adecuado: indicando una dirección, describiendo un recorrido y orientándose en el espacio.

53. Localiza puntos, dado un sistema de referencia ortonormal, utilizando coordenadas cartesianas y dibuja figuras, dadas las coordenadas de sus puntos más significativos.

54. Dado un plano y la equivalencia entre distancias en el plano y en el terreno representado.

55. Calcula distancias reales entre puntos del plano.

56. Sitúa puntos con el compás a una distancia determinada de otro o de otros dos puntos dados.

57. Sitúa puntos con el compás a la misma distancia de otros dos.

Ángulos en distintas posiciones. Exploración de figuras geométricas. Clasificación de triángulos y de cuadriláteros.

58. Identifica y representa ángulos en distintas posiciones: consecutivos, adyacentes, opuestos por el vértice, complementarios, suplementarios, etcétera.

59. Utiliza instrumentos de dibujo y herramientas tecnológicas para la construcción y exploración de formas geométricas.

60. Descubre y enuncia cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo y de un cuadrilátero.

61. Identifica y traza las tres alturas de un triángulo dado.

62. Clasifica los triángulos, atendiendo a sus lados y a sus ángulos.

63. Clasifica los cuadriláteros atendiendo al paralelismo entre sus lados y a sus ángulos.

Simetrías. Trazado de figuras simétricas.

64. Descubre simetrías especulares en figuras sencillas y familiares.

65. Dibuja, dada una figura sencilla en una cuadrícula, la figura simétrica cuando el eje de simetría es horizontal o vertical.

Posiciones relativas de rectas y circunferencias. Cuerpos redondos.

66. Identifica y representa diferentes posiciones relativas de rectas y circunferencias.

67. Conoce y nombra los elementos básicos de los cuerpos redondos: cono, cilindro y esfera.

Cálculo de perímetros y áreas.

68. Calcula perímetros y áreas a partir de croquis previamente dibujados por los alumnos.

69. Conoce las fórmulas del área del triángulo y del paralelogramo y es capaz de aplicarlas, midiendo o usando dimensiones dadas.

70. Calcula y aplica las fórmulas del perímetro de la circunferencia y del área del círculo.

c) *Elabora un árbol del problema para guiar la resolución de la actividad.*
(El apartado c se corregirá utilizando la rúbrica que teníamos en la "Actividad 4 del taller de GeoGebra". Si la respuesta a la primera pregunta es NO, la puntuación de este apartado será 0. El resto de apartados tienen un valor de 0,25)

3º

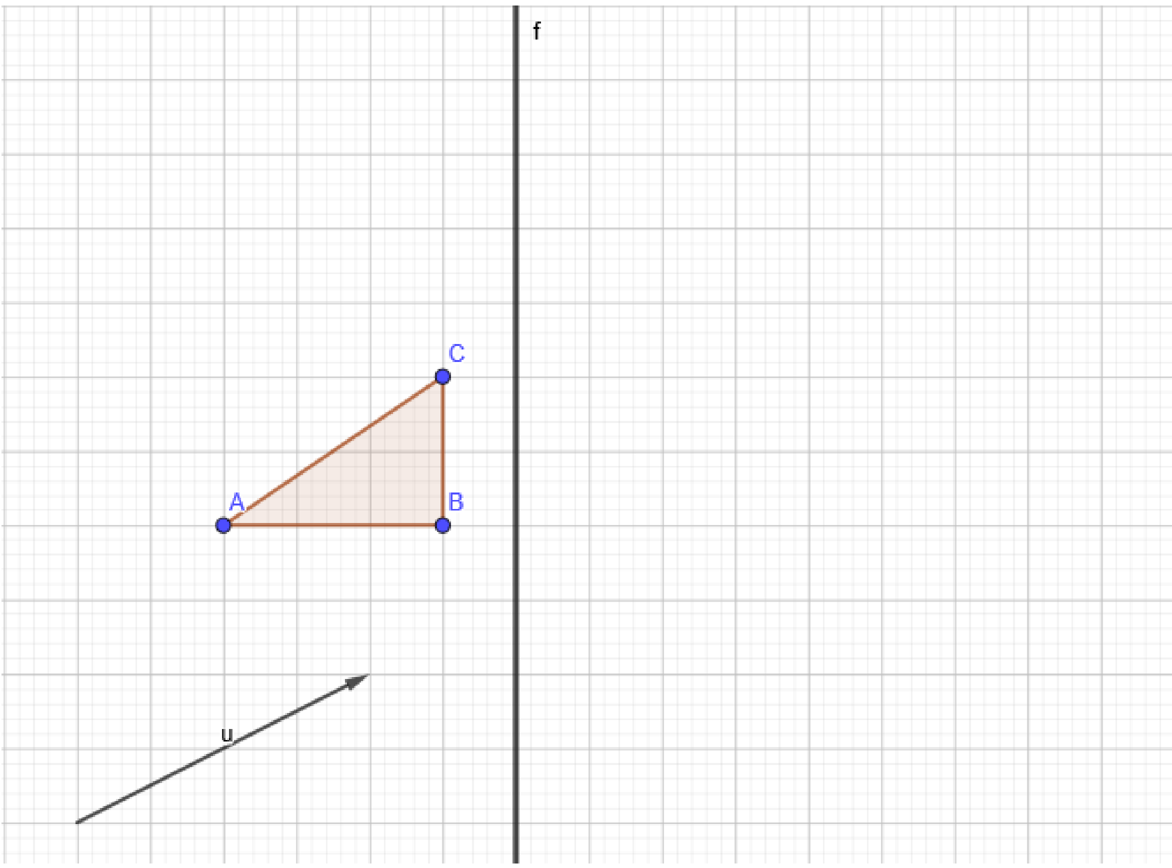


Figura 14 Triángulo recta y vector

a) *Utilizando uno de los dos elementos que aparecen en la imagen (u o f), aplica al triángulo ABC un movimiento que no deje ningún punto fijo. Indica las imágenes de cada uno de los vértices.*
b) *¿Cómo se llama el movimiento? ¿Mantiene o invierte la orientación?*

4º

Al pez marcado con ORIGINAL se le han aplicado diferentes movimientos rígidos, obteniendo el resto.

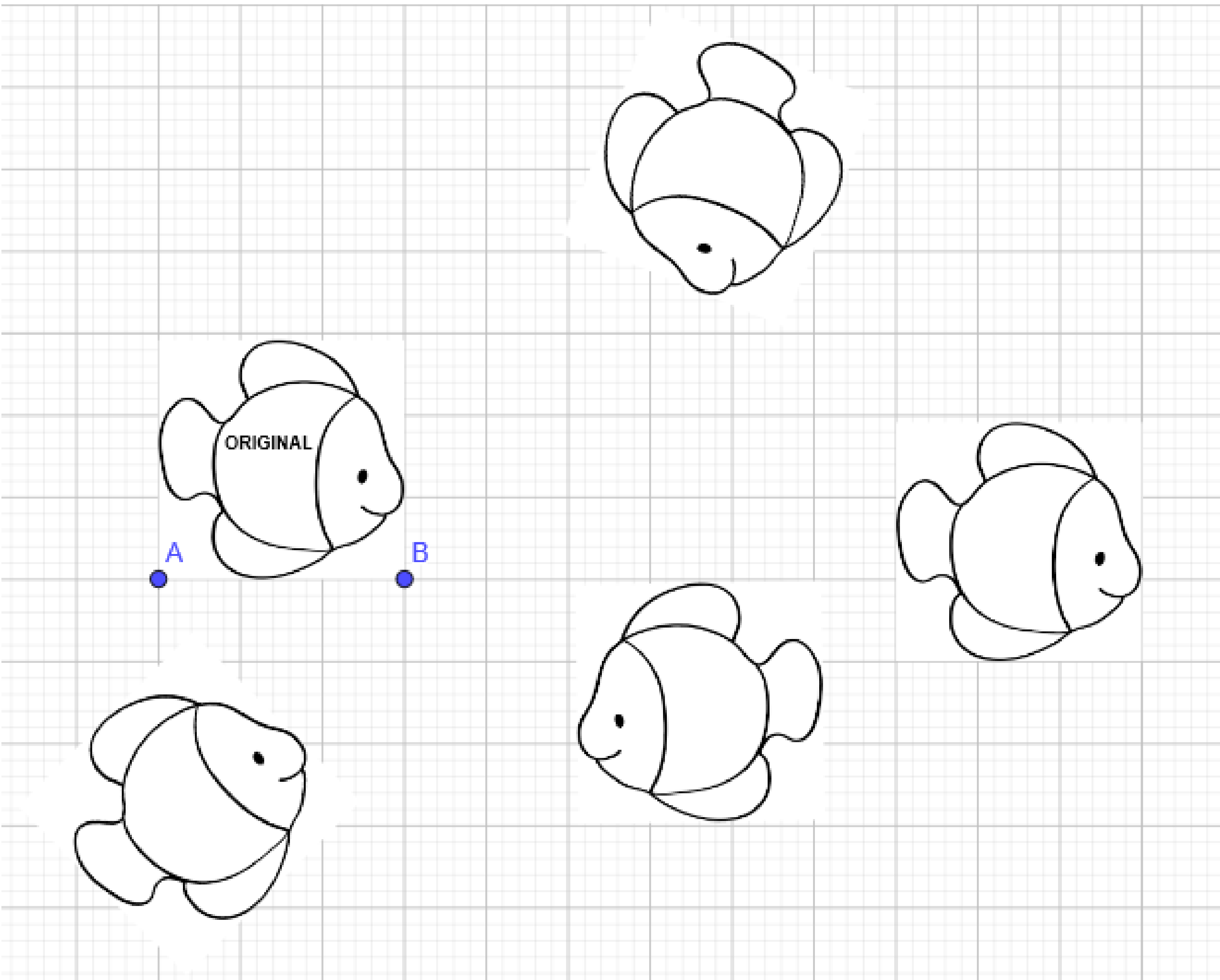


Figura 15 Pez original e imágenes

a) *Señala en la imagen cuál es una simetría, un giro, una traslación y una simetría deslizante. Explica (en otro folio) los motivos en los que te basas para la elección de cada uno de los movimientos.*

b) *Señala, en cada uno de los peces de la imagen, los homólogos de los puntos A y B. Utilizando estos puntos, construye si lo necesitas figuras auxiliares y dibuja: <u>eje de simetría</u> (sólo del pez simétrico, no del simétrico deslizado), <u>centro de giro</u> y <u>vector de traslación</u> (sólo del simétrico, no del simétrico deslizado). Explica (en otro folio) el proceso para encontrar cada uno de estos elementos.*

c) *Responde sinceramente, según tu opinión: ¿Crees que te hubiera resultado más fácil o más difícil resolver esta actividad utilizando GeoGebra? ¿Qué característica(s) de GeoGebra hubiera sido útil?*

1º, 3º y 4º están orientadas a contenidos matemáticos específicos. En el caso de 4º, en los dos primeros apartados se pide argumentación y explicar el proceso, por ello se evalúan las diferentes estrategias y la adquisición de ciertos aprendizajes relacionados con oportunidades de autorregulación. El último apartado se ha incluido para evaluar si los alumnos han aprendido el valor añadido del dinamismo del SGD frente a la utilización de lápiz y papel.

Por su parte, 2º está orientado a contenidos didácticos específicos. Las oportunidades de aprendizaje relacionadas con este contenido surgen principalmente en la discusión en torno al problema 4.

Algunos estudiantes han demostrado desconocimiento de algún contenido de aprendizaje potencial, en las entregas realizadas a través del Campus o en las discusiones en gran grupo. Sin embargo, han tenido la oportunidad de aprenderlo durante la instrucción de la secuencia. Si han aprovechado la oportunidad de aprendizaje, se ha podido evidenciar en sus respuestas a las actividades de las técnicas de evaluación. Recogidas las respuestas de todos los alumnos del curso tanto en el caso práctico como en el examen final, se ha seguido una estrategia orientada al análisis sistemático del progreso de los estudiantes en relación a las oportunidades de aprendizaje detectadas.

Capítulo 4. Diseño y realización del proceso formativo

En este capítulo vamos a ver el proceso formativo que se ha llevado a cabo en el grupo de alumnos que han formado parte de esta investigación. Además, se han llevado a cabo dos talleres piloto. En el taller piloto 1 analizamos las respuestas de los alumnos y clasificamos los errores cometidos, después comprobamos la eficacia del método desarrollado en el taller piloto mediante el estudio de las respuestas obtenidas en una prueba de clase y en el examen de la asignatura. En el taller piloto 2, la secuencia didáctica está formada ya por los cuatro problemas de la secuencia didáctica y alternamos la realización de los problemas en parejas con discusiones en gran grupo. Analizamos la aplicación de la sistemática y aplicamos el instrumento TRU-Math. En ambos talleres piloto se ha pasado la misma encuesta a los alumnos que ha servido para conocer sus preferencias y mejorar la secuencia en sucesivas aplicaciones.

4.1. Guía docente de la asignatura Matemáticas y su Didáctica III

Matemáticas y su Didáctica III es una asignatura obligatoria de 6 ECTS que se imparte durante el primer semestre de 4º curso del Grado de Magisterio en Educación Primaria. La guía docente de la asignatura la desarrolla el equipo de profesores del área; posteriormente en cada grupo se realizan adaptaciones que se recogen en otro documento, el cronograma. En la guía aparecen aspectos relacionados con las competencias, resultados de aprendizaje, contenidos, metodología y evaluación. Detallamos los más relevantes

4.1.1. Competencias

CES Don Bosco es un centro adscrito a la Universidad Complutense de Madrid, por ello las competencias recogidas en la guía docente son comunes.

Generales

- Diseñar estrategias didácticas adecuadas a la naturaleza del ámbito científico partiendo del currículo de Primaria, para las áreas de Ciencias Experimentales, Ciencias Sociales, Matemáticas, Lengua, Música, Plástica y Educación física.

Transversales

- Valorar la importancia del trabajo en equipo y adquirir destrezas para trabajar de manera interdisciplinar dentro y fuera de las organizaciones, desde la planificación, el diseño, la intervención y la evaluación de diferentes programas o cualquier otra intervención que lo precisen.
- Conocer y utilizar estrategias de comunicación oral y escrita y el uso de las TIC en el desarrollo profesional.
- Adquirir un sentido ético de la profesión.
- Conocer y aplicar los modelos de calidad como eje fundamental en desempeño profesional.
- Adquirir la capacidad de trabajo independiente, impulsando la organización y favoreciendo el aprendizaje autónomo.
- Reconocer la mutua influencia entre ciencia, sociedad y desarrollo tecnológico, así como las conductas ciudadanas pertinentes, para procurar un futuro sostenible.

Específicas

- Comprender los principios básicos y fundamentales de las Matemáticas básicas.
- Adquirir competencias matemáticas básicas (geométricas, representaciones espaciales, organización e interpretación de la información).
- Conocer el currículo escolar de matemáticas.
- Valorar distintas estrategias metodológicas adecuadas a las diferentes áreas del conocimiento en Matemáticas.
- Analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas.
- Plantear y resolver problemas vinculados con la vida cotidiana.
- Valorar la relación entre matemáticas y ciencias como uno de los pilares del pensamiento.
- Desarrollar y evaluar contenidos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y promover las competencias correspondientes en los estudiantes.

4.1.2. Resultados de aprendizaje

1. Identificar giros, traslaciones, simetrías y simetrías deslizantes en el plano. Así como, sus elementos principales.
2. Saber en qué cursos y en qué profundidad aparecen los movimientos rígidos dentro del currículo de Educación Primaria.
3. Resolver problemas de geometría, utilizando GeoGebra y con lápiz y papel.
4. Diseñar problemas geométricos y una herramienta didáctica para guiar la resolución (árbol del problema).
5. Conocer qué es un experimento y un suceso aleatorio. Sus elementos principales y tipos de sucesos.
6. Calcular probabilidades utilizando la regla de Laplace.

7. Diferenciar razón y proporción. Conocer una proporción presente en la naturaleza, obras de arte…: La proporción áurea.
8. Resolver problemas relacionados con la vida cotidiana que involucren el uso de porcentajes.
9. Diferenciar expresiones algebraicas y ecuaciones.
10. Identificar el grado de monomios y polinomios. Operar estas expresiones algebraicas.
11. Saber qué es una ecuación y conocer sus elementos.
12. Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita y problemas utilizando estas ecuaciones.

4.1.3. Contenidos

1. MOVIMIENTOS EN EL PLANO
    - Análisis del currículum de E. P. relativo a movimientos rígidos en el plano.
    - Movimientos rígidos en el plano: traslación, giro, simetrías. Análisis, estudio y construcción de frisos y pavimentos. Comparación con una transformación del plano que no es isometría: homotecias.
    - Análisis de materiales didácticos: Tangram, GeoGebra.
    - Diseño de problemas para Educación Primaria y árbol del problema.
2. PROBABILIDAD
    - Experimento y suceso aleatorio. Espacio muestral y sucesos. Tipos de sucesos.
    - La probabilidad como grado de creencia.
    - Regla de Laplace.
    - Análisis de la transposición didáctica de la Estadística y la Probabilidad en los textos escolares.

3. MAGNITUDES PROPORCIONALES
    - Razón vs proporción: proporción áurea.
    - Porcentajes en la vida cotidiana.
4. EXPRESIONES ALGEBRAICAS vs ECUACIONES
    - Qué es una expresión algebraica. Tipos de expresiones algebraicas.
    - Características de monomios y polinomios: grado, coeficiente. Operaciones con monomios y polinomios.
    - Qué es una ecuación. Tipos de ecuación.
    - Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.
    - Problemas relacionados con la vida cotidiana. Resolver utilizando ecuaciones de primer grado con una incógnita.

4.1.4. Metodología docente y actividades de aprendizaje

Una de las tres claves del Sistema Preventivo de Don Bosco (razón-religión-amor), es la Razón, la equiparamos a una "formación científica", que proporcione esquemas mentales idóneos para una buena formación de pensadores (pedagogía del "honrado ciudadano" de Don Bosco).

Basándonos en esta “premisa”, nuestras metodologías activas son:

- Técnicas de pensamiento: Análisis asociativo o rueda lógica.
- Flipped classroom o clase invertida.
- Trabajo cooperativo.
- Aprendizaje basado en proyectos.
- Discusiones en gran grupo, con uso de la tecnología.

Otros métodos docentes

- Clases teóricas: exposición oral por parte de la profesora, con participación de los alumnos.

- Taller de GeoGebra para trabajar la resolución de problemas relacionados con las isometrías.
- Clases prácticas: resolución de ejercicios y problemas.
- Tutorías: sesiones individuales o en pequeños grupos.
- Estudio personal: aprendizaje autónomo del alumno académicamente dirigido por la profesora.
- Uso de la plataforma Campus Virtual de CES Don Bosco para acceder a todos los documentos, trabajos, tares y actividades desarrollados en la asignatura.

4.1.5. Evaluación

Las técnicas de evaluación son comunes para todos los grupos de la asignatura:

- Examen final *(50% de ponderación respecto a la nota final de la asignatura).*
- La realización y presentación de un proyecto llevado a cabo en grupo cooperativo, sobre el tema 3. Magnitudes proporcionales *(15% de ponderación respecto a la nota final de la asignatura).*
- La visualización de vídeos en los temas que se desarrollan con la metodología “flipped classroom” y la realización de actividades y ejercicios propuestos en clase, en algunos casos a través del campus *(10% de ponderación respecto a la nota final de la asignatura).*
- Prácticas pedidas en el taller de GeoGebra *(10% de ponderación respecto a la nota final de la asignatura).*
- Participación en las discusiones en gran grupo sobre movimientos rígidos en el plano *(5% de ponderación respecto a la nota final de la asignatura).*
- Un caso práctico de aplicación de los contenidos. *(10% de ponderación respecto a la nota final de la asignatura).*

4.2. Cronograma del curso

El cronograma es un documento que la profesora de la asignatura elabora por cada grupo de clase. Al principio del curso, se informa a los alumnos detalladamente. A continuación, se presentan los aspectos más relevantes del cronograma del grupo que participa en la investigación.

4.2.1. Estimación de la dedicación del estudiante a las actividades formativas

Tabla 7 Estimación de la dedicación del estudiante a actividades formativas

TIPO DE ACTIVIDAD	HORAS PERSENCIALES	HORAS NO PRESENCIALES
Exposición	18	
Actividades prácticas	40	
Tutorías	2	
Trabajos		40
Estudio		40
Campus		10
HORAS TOTALES	60	90

La carga total de horas de trabajo del estudiante es 150 horas.

4.2.2. Actividades formativas

La siguiente tabla tiene un carácter orientativo y da una visión general sobre el desarrollo de la asignatura. La columna segunda columna indica el tiempo estimado para el correcto desarrollo de los contenidos de la unidad didáctica. Se anuncia en el Campus virtual: orden en el que se desarrollan las unidades, las fechas de comienzo y fin, los plazos de entregas, etc.

Tabla 8 Actividades formativas por unidad didáctica

UNIDAD	SEMANAS	ACTIVIDADES FORMATIVAS (a detallar en el Campus)	TÉCNICAS DE EVALUACIÓN
MOVIMIENTOS EN EL PLANO	5	Taller GeoGebra. Discusiones en gran grupo.	Examen final. Debates y exposiciones. Caso práctico.
PROBABILIDAD	3	Exposición magistral. Clases prácticas: resolución de ejercicios y problemas.	Examen final. Debates y exposiciones.
MAGNITUDES PROPORCIONALES	3	Aprendizaje basado en proyectos.	Examen final. Proyecto.
EXPRESIONES ALGEBRAICAS vs ECUACIONES	3	Flipped classroom. Técnicas de pensamiento: análisis asociativo y rueda lógica.	Examen final. Debates y exposiciones. Caso práctico.
INTRODUCCIÓN, REPASO Y AMPLIACIÓN	2 sesiones	Presentación de la asignatura. Actividades de repaso y ampliación.	Examen final. Debates y exposiciones.

4.3. Horario del grupo

El horario asignado a la asignatura Matemáticas y su Didáctica III para el grupo 4º ABL de Centro de Estudios Superiores Don Bosco se recoge en la siguiente Tabla.

Tabla 9 Horario

	LUNES	MARTES
11:35 – 12:30	Clase	Clase
DESCANSO		
12:30 – 13: 25	Clase	Clase

4.4. El taller piloto 1

El primer taller piloto se desarrolla durante los meses de noviembre y diciembre del año 2018, con un grupo de alumnos de 4º curso del Grado de Magisterio de Educación Primaria del Centro de Estudios Superiores Don Bosco (Centro Adscrito a la Universidad Complutense de Madrid), dentro de la asignatura Matemáticas y su Didáctica III. En este taller los alumnos trabajaban en el aula de informática individualmente o por parejas, la resolución de actividades o problemas. Se estructura en cuatro sesiones, las dos primeras son dobles, con una duración de una hora y 50 minutos y las últimas son sesiones de 55 minutos. La última tiene lugar en el aula clase y se trata de una discusión en gran grupo.

Previo al desarrollo del taller piloto, se había iniciado el tema de movimientos en el plano, mediante una sesión doble en el aula de informática con GeoGebra y una sesión de 55 minutos de puesta en común en el aula-clase. En estas se descubren los movimientos en el plano, el número de puntos fijos de cada uno de ellos y si mantiene o invierte la orientación.

Las competencias desarrolladas en la unidad didáctica se evalúan en tres preguntas en una prueba de clase y mediante dos preguntas en el examen final de la asignatura. En el contexto de la investigación, utilizamos estas preguntas para analizar la eficacia del método desarrollado en el taller piloto para la adquisición de conocimientos.

El grupo participante lo componen dieciocho alumnos, estos se agruparon en nueve parejas según afinidades personales. Numeramos las parejas de 1 a 9. En ocasiones, por causas justificadas, algún miembro de la pareja se ausenta durante la sesión y la persona de la pareja que acudía a clase realizaba las actividades individualmente. Este grupo ha utilizado el SGD en el curso anterior, en la asignatura Matemáticas y su Didáctica II por lo que se considera que manejan la herramienta.

La identificación de los distintos tipos de errores nos permite orientar la atención hacia los diferentes aspectos y llevar a cabo una evaluación y un diagnóstico efectivo para ayudar a los estudiantes en sus dificultades y carencias. Algunos autores han realizado categorizaciones y clasificaciones de los errores, atendiendo a distintos enfoques.

Para analizar los errores cometidos en el taller piloto vamos a establecer una clasificación de errores en siete tipos:

1. Errores de lenguaje.

   En la resolución de los ejercicios y problemas propuestos en el taller piloto, algunos alumnos han presentado serios problemas al utilizar símbolos y vocabulario matemático. Provoca problemas tanto en la comprensión del enunciado como en la expresión de las soluciones.

2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.

   Las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales en ocasiones ha sido una fuente de dificultades para la realización de las tareas geométricas propuestas.

3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas o conocimientos previos.

   Se incluyen todas las deficiencias de conocimientos sobre contenidos y procedimientos para la realización de una tarea. Desde conocimientos que se suponen adquiridos en Educación Secundaria Obligatoria a contenidos impartidos en la asignatura Matemáticas y su Didáctica II o en el propio curso en la asignatura Matemáticas y su Didáctica III.

   Dentro de este error, consideramos un subtipo: Errores debidos a teoremas o definiciones deformadas. Se producen por deformación de un principio, regla, teorema o definición identificable.

4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento.

   La experiencia sobre problemas similares puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. Los alumnos continúan empleando las mismas operaciones cognitivas aun cuando las condiciones originales se hayan modificado. Están inhibidos para el procesamiento de nueva información. En general, son causados por la incapacidad del pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas.

5. Errores debidos a datos mal utilizados.

   Este error se produce cuando hay una discrepancia entre los datos de la actividad y el tratamiento de éstos por parte del alumno.

6. Errores debidos a inferencias no válidas lógicamente.

   Cuando se produce error lógico el alumno parte de una premisa que puede ser cierta pero no razona correctamente según ésta. (Fernández-Bravo, 2011)

7. Falta de verificación de la solución.

   En nuestro caso, se trata de errores solucionables si se realiza un arrastre test al finalizar la construcción (Arzarello, Olivero, Paola y Robutti, 2002)

8. Errores técnicos.

   Definimos este tipo de errores como los que surgen por un mal uso de la herramienta, en este caso el Software de Geometría Dinámica GeoGebra.

Siguiendo a González-López (2001) las actividades que se propusieron se pueden clasificar en los siguientes tipos:

- Actividades de construcción de figuras.
- Actividades de comprobación de propiedades.
- Actividades de conjeturas e investigación.

4.4.1. Análisis de actividades de construcción de figuras y comprobación de propiedades.

En la práctica nº 1 del taller piloto se proponen las siguientes actividades:

Aprovechad el carácter dinámico de GeoGebra y comprobad vuestras construcciones al finalizar las actividades, utilizando el arrastre de test.

Actividad 1

Construye un triángulo de vértices ABC y su simétrico respecto a una recta cualquiera. Comprueba que el eje de simetría coincide con la mediatriz de cada vértice y su imagen.

Añade una *casilla de control para ocultar objetos* por cada una de las mediatrices entre vértice e imagen de vértice.

Actividad 2

Construye un polígono y gira respecto a un punto cualquiera un ángulo de 60 grados. Comprueba que el centro de giro se encuentra en la bisectriz del ángulo que tiene por vértice el centro de giro y sus lados adyacentes pasan por un vértice y la imagen del vértice. Comprueba, además, que la bisectriz coincide con la mediatriz de los vértices.

Añade una *casilla de control para ocultar objetos* para la bisectriz y otra casilla para la mediatriz.

Actividad 3

Construye un polígono y traslada respecto a un vector cualquiera. Comprueba que este movimiento es a su vez composición de dos simetrías. Dibuja los ejes de cada una de las simetrías que forman la composición. Comprueba el resultado obtenido.

¿Qué proceso has seguido para encontrar las rectas? Describe el proceso en un cuadro de texto.

Algunos alumnos cometen el error de construir los polígonos uniendo segmentos, rectifican cuando la profesora les pide que pongan atención y utilicen una herramienta propia para la construcción de polígonos. Se trata de un error técnico, tipo 8.

En cuanto a la actividad 1, surge la duda de si se trata de simetría axial. Esta confusión se debe a que aparece como botón en GeoGebra y en el curso anterior han trabajado la simetría central como isometría (en este curso se trabajará como giro de 180º respecto a un punto). La profesora insta al alumno a volver a leer y comprobar que dice “respecto a una recta cualquiera” por lo que debe ser simetría axial.

La mayoría de los alumnos en lugar de trazar la mediatriz entre cada vértice y su imagen, traza las mediatrices de los vértices del triángulo. Es un error de tipo 1 o 4. Otras parejas han tenido errores de tipo 8 al no asociar correctamente las casillas de control a las rectas.

Si nos centramos ahora en la actividad 2. Se palpa en la resolución de la actividad que la pareja 8 comete errores de tipo 1, ya que tiene dificultades con el lenguaje matemático visibles en los nombres que asignan a las casillas de control como *“mediatriz a y a’ ”*, *“bisectriz a y a’ ”*. Asignan a los vértices letras minúsculas y hablan de bisectrices entre vértices.

Seis parejas de las ocho resuelven la tercera actividad correctamente, estas seis parejas trazan la mediatriz entre un punto del polígono y su imagen para construir el primer eje de simetría. La recta cumple que es perpendicular al vector de traslación. Sería suficiente construir una recta cualquiera perpendicular al vector de traslación. Sin embargo, la única pareja que describe en su cuadro de texto que ha elegido el primer eje de simetría perpendicular al vector, no ha resuelto el ejercicio de manera correcta porque ha trazado esta perpendicular “a ojo” sin utilizar los botones de GeoGebra. Es un error técnico, de tipo 6 y también es error de tipo 7 ya que se podía haber resuelto si hubieran utilizado el arrastre test al finalizar la construcción.

Varias parejas resuelven la actividad de manera correcta, pero cometen errores de tipo 1 al describir el proceso en un cuadro de texto. Las parejas 3 y 8 confunden mediatriz con bisectriz al explicar uno o más pasos de la construcción. La pareja 1 escribe lo siguiente: *“Hemos realizado la simetría del segmento y hemos visto que al coincidir los vértices del segmento de la traslación y el segundo de la simetría con una mediatriz, podríamos obtener un polígono que se ponga encima del otro.”* El lenguaje no es adecuado ya que cuando hablan de “simetría de segmento” se refieren a simetría respecto de la recta. No especifican el proceso de construcción del primer eje de simetría.

La pareja 3 ha dibujado un primer eje de simetría al azar y después ha intentado que cuadre el segundo. Al utilizar el arrastre de GeoGebra para comprobar la solución se descubre que no han seguido un procedimiento adecuado. En la figura 16 se puede ver la construcción y en la figura 17 la comprobación utilizando arrastre.

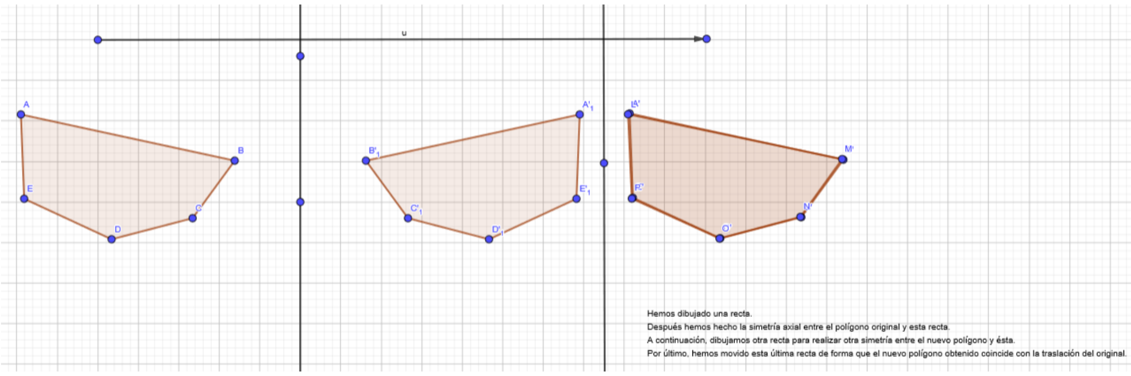


Figura 16 Actividad 3. Construcción de la pareja 3

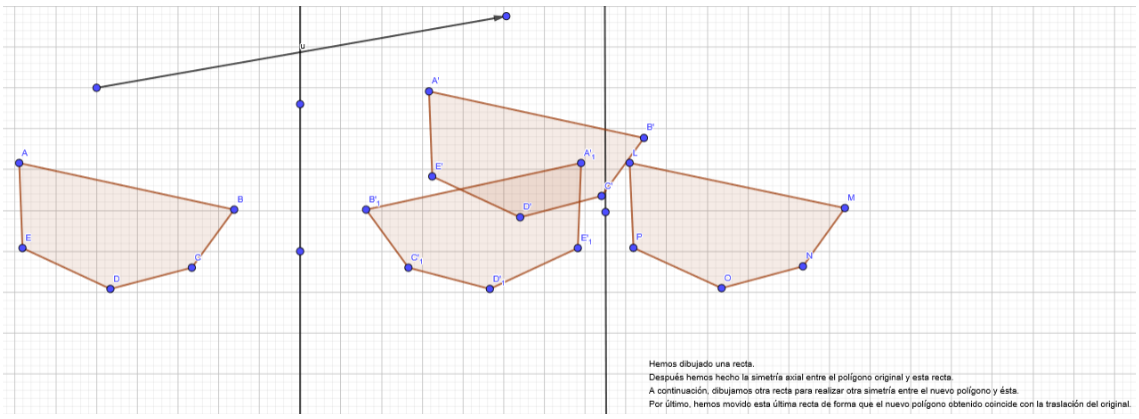


Figura 17 Comprobación de construcción incorrecta. Actividad 3, pareja 3.

4.4.2. Análisis de actividades de conjetura e investigación.

Las dos primeras actividades (Martín-Nieto, 2019) se llevan a cabo en la misma sesión doble en la que se habían realizado las actividades de construcción de figuras y comprobación de propiedades.

En primer lugar, sin cambiar el color del fondo, se deben responder a los tres primeros apartados. Deben buscar puntos fijos utilizando el arrastre de GeoGebra y comprobar si los movimientos mantienen o invierten la orientación. Cuando se ha respondido, cambiando el color de fondo se observa que en realidad el movimiento se ha obtenido como composición de dos movimientos, cuyos elementos estaban dibujados en blanco.

En el caso de la actividad de conjetura e investigación 1 (figura 18), el movimiento se ha generado por la composición de una simetría y una traslación con vector perpendicular al eje de simetría. El movimiento que se genera es una nueva simetría, el nuevo eje es paralelo al eje inicial.

En la actividad de conjetura e investigación 2 (figura 19), el movimiento es nuevamente composición de una simetría y una traslación. En este caso el vector de traslación no es perpendicular al eje de simetría y la composición de ambos movimientos genera una simetría deslizante.

La composición de una simetría y una traslación es o bien una simetría o bien una simetría deslizante. (Hernández, E; Vázquez, M.J.; Zuirro, 2012)

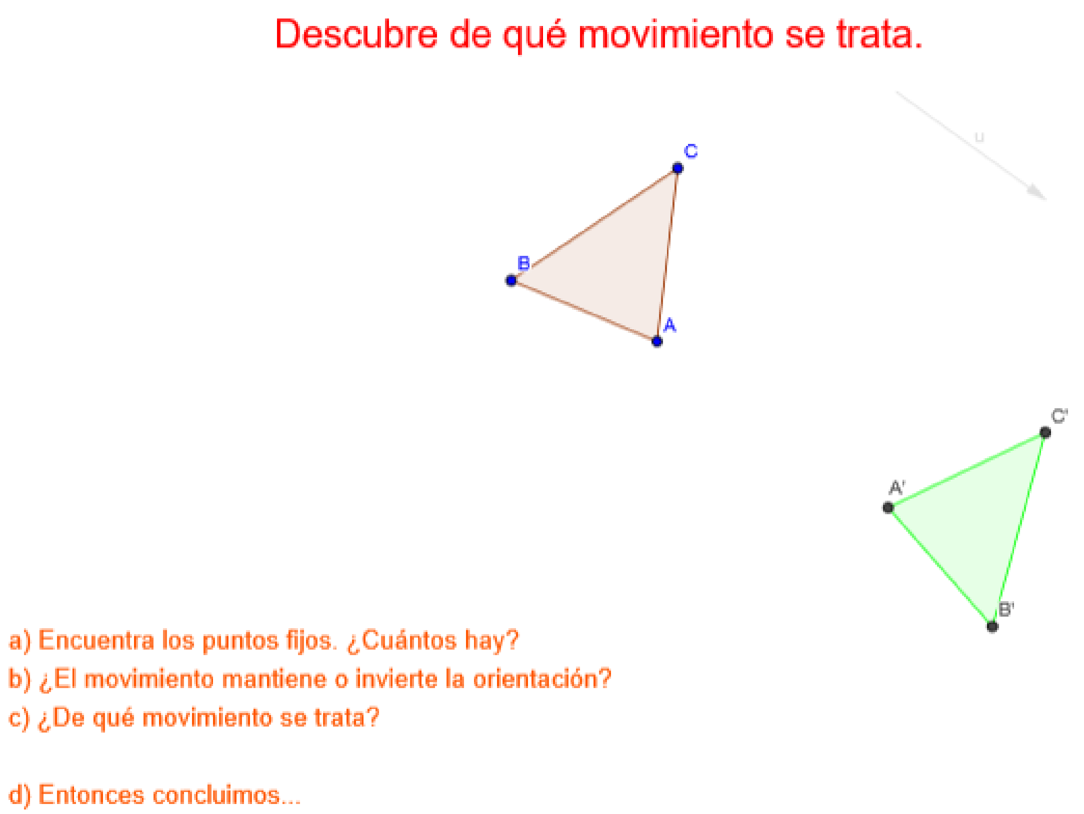


Figura 18 Actividad de conjetura e investigación 1. Enunciado

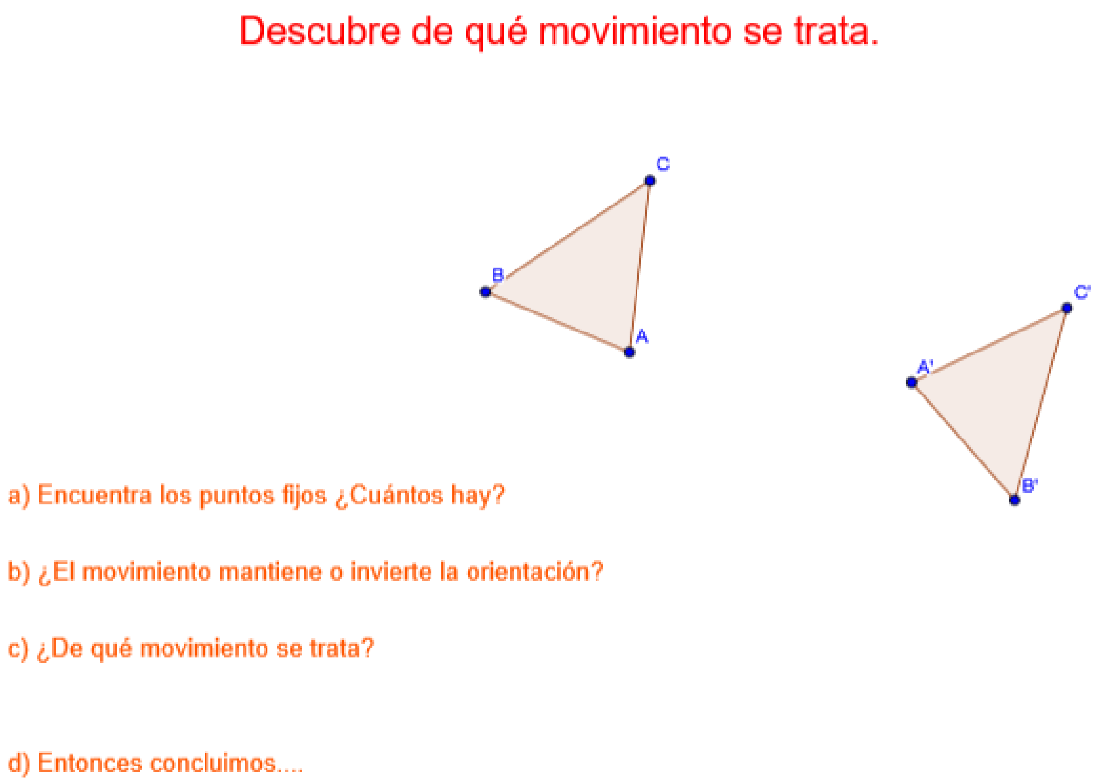


Figura 19 Actividad de conjetura e investigación 2. Enunciado

Cuando comenzamos estas actividades, en general los alumnos no han interiorizado los contenidos impartidos durante las sesiones previas al taller, por lo que gran parte de los errores son de tipo 3. La mayoría de las parejas las entiende como cuestiones separadas, sin darse cuenta de que en ambos casos nos encontramos ante la composición de una simetría y una traslación, aunque en la composición se obtengan movimientos diferentes. Los apartados d resultan muy genéricos.

Nos centramos ahora en analizar en concreto la actividad 1: Todas las parejas excepto la persona de la pareja 1 que durante esta sesión trabaja sola, representan el nuevo eje de simetría, aunque el enunciado no lo pide. En el apartado d, se observan errores de tipo 1 o 3. Por ejemplo, la pareja 2 responde: *"El eje de simetría y la recta de traslación no coinciden pero no son paralelos."* No se expresan correctamente, pero puede ser debido a deficiencias del aprendizaje. La pareja 3 responde *"Concluimos que se trata de una simetría axial en la que el eje de simetría es trazado por la mediatriz"* cometen un error de tipo 4, debido a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento, pues utilizan el mismo proceso que han realizado en ejercicios anteriores para encontrar la recta de simetría.

En las soluciones de la actividad 2, las parejas 4 y 8 concluyen que el movimiento es de nuevo una simetría. Incluso trazan un supuesto “eje de simetría”. Es un error de tipo 4, la experiencia sobre el anterior problema produce una rigidez de pensamiento, inhibidos para el procesamiento de una nueva información.

Las actividades desde la 3 hasta la 9, se desarrollaron en la segunda sesión doble del taller. En la tercera actividad, las preguntas son más concretas que en los casos anteriores, hay más parejas que han respondido al ejercicio correctamente en su totalidad.

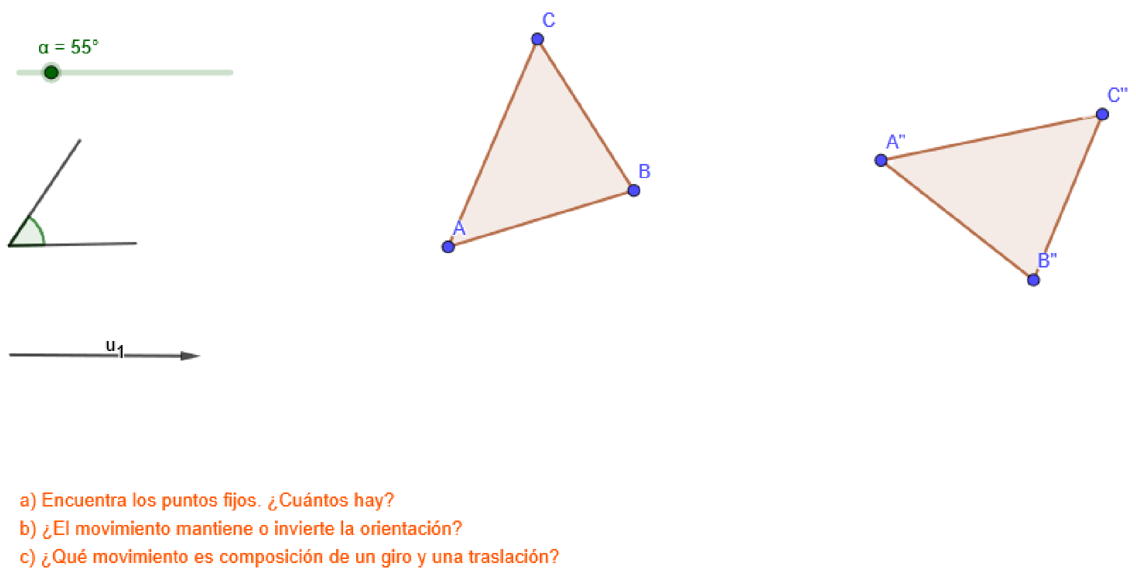


Figura 20 Actividad de conjetura e investigación 3. Enunciado

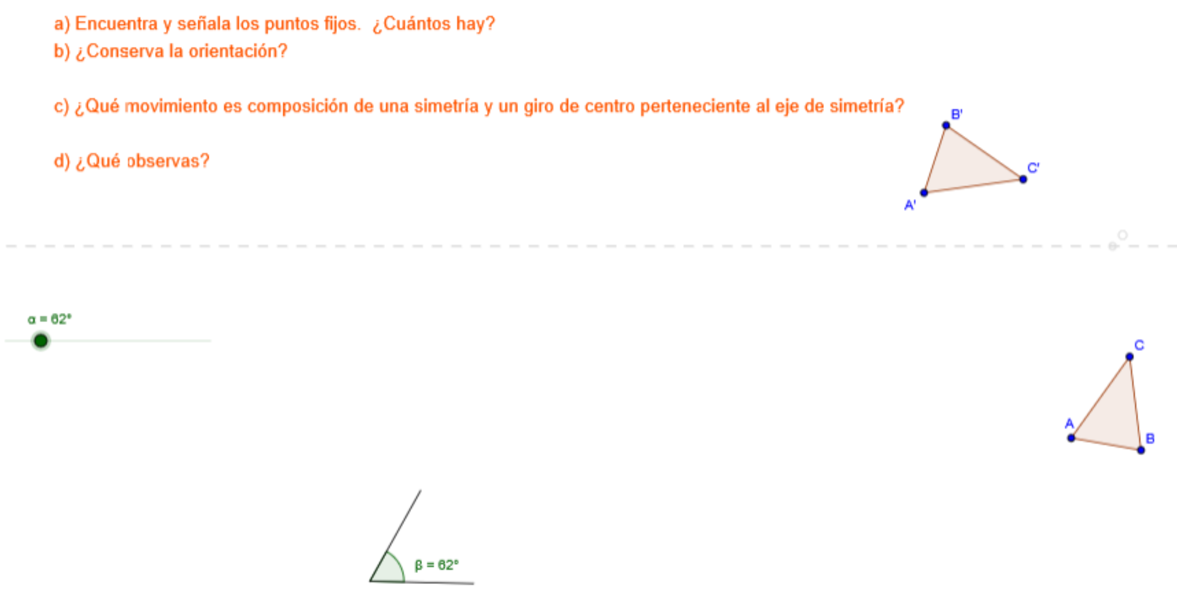


Figura 21 Actividad de conjetura e investigación 4. Enunciado

El objetivo de la cuarta actividad es que descubran que la composición de una simetría y un giro con centro perteneciente al eje de simetría, es otra simetría. (Hernández, E; Vázquez, M.J.; Zuirro, 2012). Solamente la pareja 6 observa que el centro de giro pertenece al eje de simetría, pero lo hace ayudada por la profesora.

Las siguientes actividades están enfocadas hacia el descubrimiento de que cualquier movimiento es composición de a lo sumo tres simetrías. El objetivo es que descubran que "identidad" y "traslación" son movimientos rígidos que se pueden expresar como composición de dos simetrías y "giro" con una simetría.

Destacan las soluciones de la pareja 6 que explican cada uno de los pasos utilizando un lenguaje adecuado. En general, los alumnos las resuelven correctamente. Sin embargo, en la prueba de clase en la que evaluamos las competencias adquiridas, se detectan fallos que son originados porque estas actividades no cumplen el objetivo para el que fueron planteadas. Es decir, no adquieren que los movimientos identidad y traslación son equivalentes a la composición de dos simetrías ni que giro es equivalente a la composición de dos simetrías. En una de las actividades se pregunta explícitamente el número de simetrías que componen los movimientos (tabla 10) y los resultados no son los esperados.

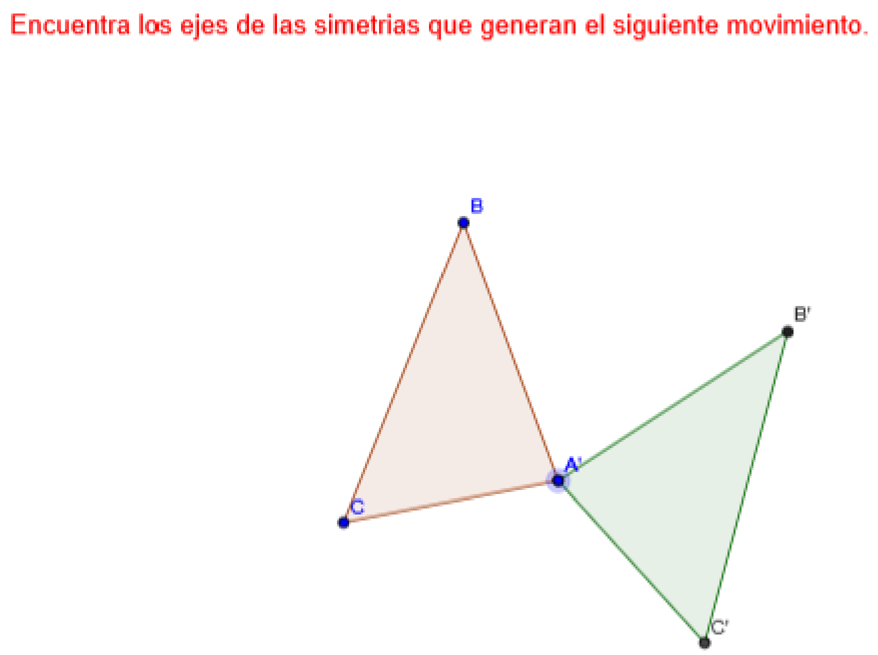


Figura 22 Actividad de conjetura e investigación 5. Enunciado

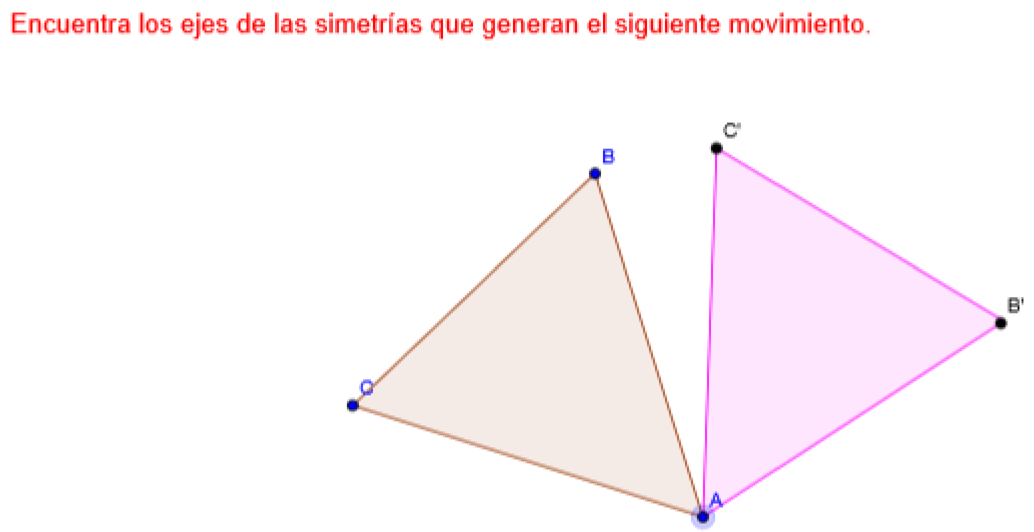


Figura 23 Actividad de conjetura e investigación 6. Enunciado

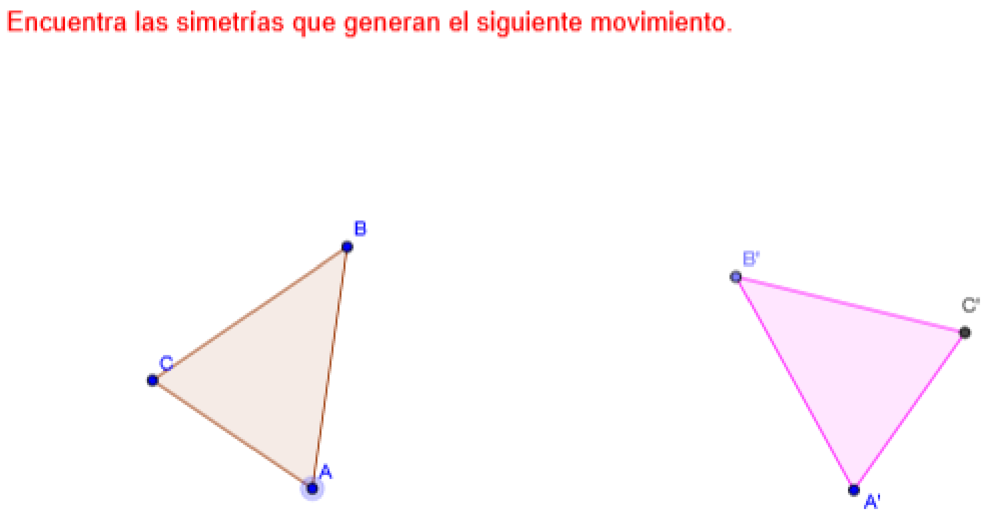


Figura 24 Actividad de conjetura e investigación 7. Enunciado

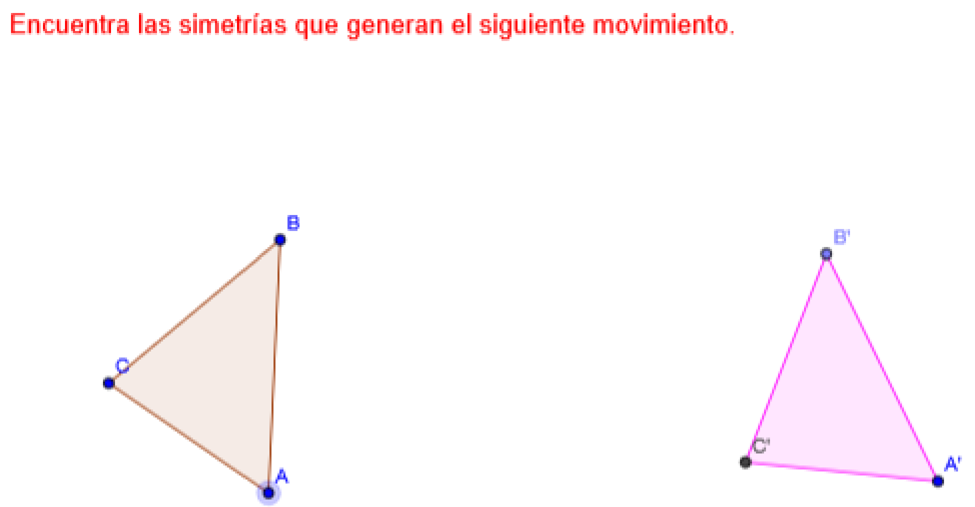


Figura 25 Actividad de conjetura e investigación 8. Enunciado

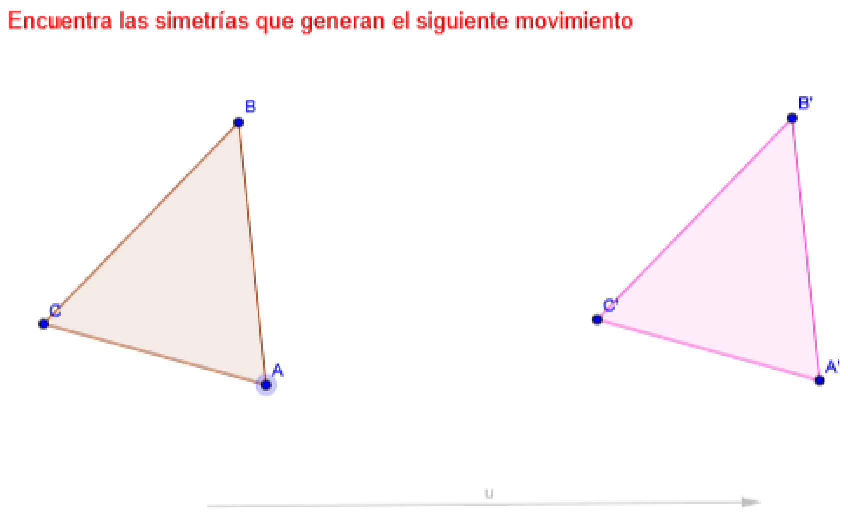


Figura 26 Actividad de conjetura e investigación 9. Enunciado

La última sesión del taller que se desarrolló en el aula de informática tuvo una duración de 50 minutos. Durante esta sesión, los participantes resolvieron un problema.

A continuación se muetra un plano de cuatro pupitres colocados para trabajar de manera colaborativa en parejas.
Dado el pupitre de color negro, hemos aplicado diferentes movimientos, obteniendo el resto.

a) Pintad de color azul la figura que sea una simetría axial del pupitre negro; de verde la que sea un giro; de de rojo la que sea una traslación.

b) Escribid los argumentos en los cuales os habéis basado para la elección de los colores en un cuadro de texto.

b) Para el que sea simetría, construid el eje de simetría que transforma el pupitre negro al azul.

c) Para el que sea giro, representad el centro de giro mediante un punto.

d) Para el que sea traslación, construid el vector de traslación.

e) Escribid detalladamente los pasos para las construcciones, en otro cuadro de texto.

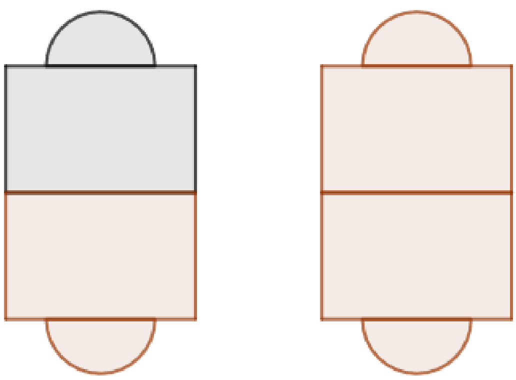


Figura 27 Actividad de conjetura e investigación 10. Enunciado

Cuando los alumnos abren la actividad, no consideran la posibilidad de utilizar el arrastre para investigar. Lo clasificamos como error de tipo 8, un mal uso de la herramienta. Solamente lo utilizan bajo la orquestación de la profesora que dice “podéis mover el pupitre negro”. La expresión general es de asombro y les ayuda en gran medida a resolver los diferentes apartados. Sin embargo, cuando consideran que han encontrado los diferentes elementos que generan los movimientos (recta de simetría, centro de giro, traslación) sí utilizan en general arrastre test para comprobar que se mantienen las propiedades.

Dos parejas se dan cuenta de que hay un pupitre que se puede considerar trasladado o simétrico del pupitre negro. La respuesta de la profesora es: *“El enunciado dice que marques uno con cada color, así que si hay otro que solamente puede ser trasladado…”*. La realización del problema ha requerido mucha menos orquestación por parte de la profesora que los anteriores. Los participantes del estudio creen que esto se debe a que han adquirido cierta soltura durante el taller.

Cuatro de las ocho parejas necesitan dibujar puntos contenidos en las figuras para construir los distintos elementos. Por ejemplo, la pareja 2 responde al apartado d:

“Hemos ubicado dos puntos definiendo así algunos de los vértices de las figuras, uno en el objeto azul y otro en el negro, uno de cada objeto siendo cada punto A y A’, para poder obtener la mediatriz de ambos y sacar la recta de simetría.

Para obtener el vector de traslación hemos ubicado un punto en el objeto trasladado y hemos seleccionado la herramienta vector.

Para colorear los objetos hemos clicado encima de ellos y cambiado el color en propiedades.

Para obtener el centro de giro hemos movido los objetos para poder ver si coincidía algún punto. El punto que ha coincidido es el punto fijo y por tanto el centro de giro.”

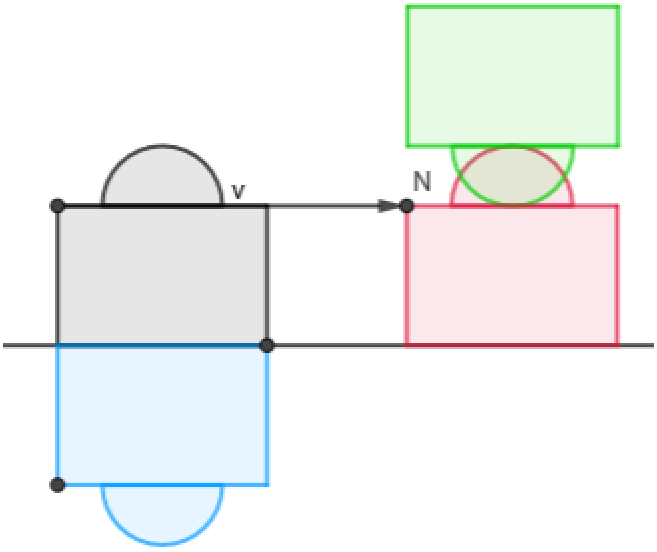


Figura 28 Actividad de conjetura e investigación 10. Solución de la pareja 2

Cuatro de las ocho parejas no utilizan un procedimiento adecuado para obtener el vector de traslación. Construyen un vector cualquiera y realizan una traslación por ese vector del pupitre negro, luego modifican el vector para que la traslación coincida con el pupitre rojo. Es un error de tipo 6 pues los alumnos parten de una premisa cierta pero no razonan correctamente según esta. También es de tipo 5, ya que no utilizan adecuadamente los datos y de tipo 7, pues es solucionable si se realiza un arrastre test al finalizar la construcción, por ejemplo, moviendo el extremo del vector, como se muestra en la figura 30.

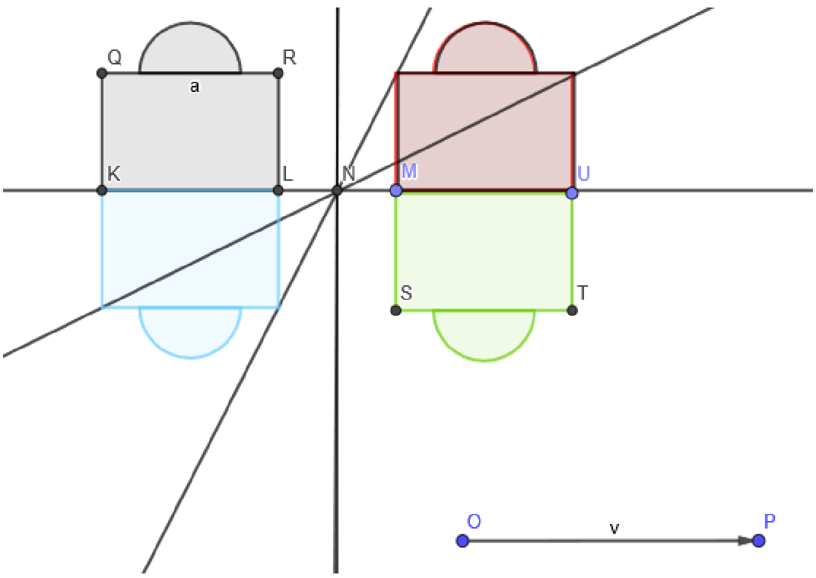


Figura 29 Actividad de conjetura e investigación 10. Solución de la pareja 8

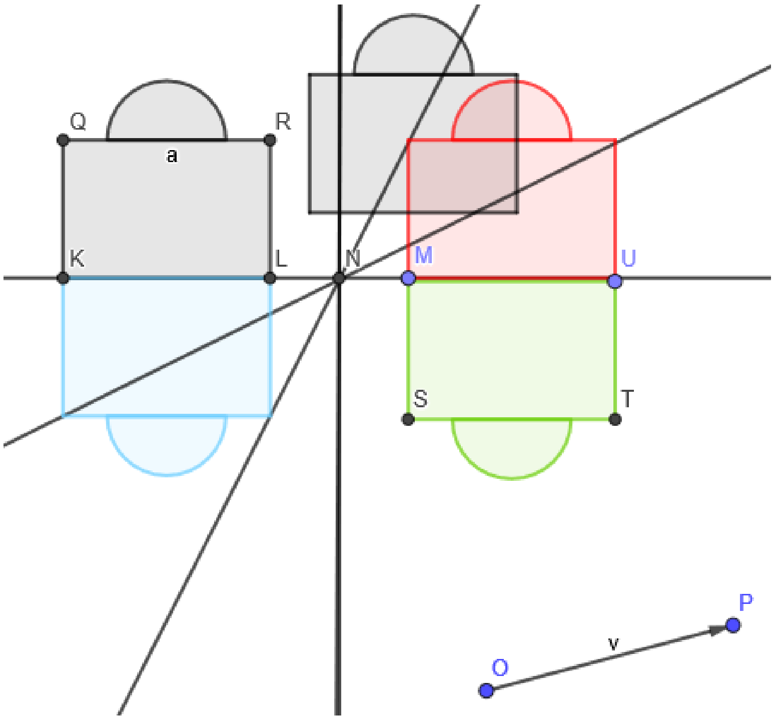


Figura 30 Actividad de conjetura e investigación 10. Pareja 8, arrastre test

La pareja 9 se plantea construir dos vectores de traslación, uno para el rectángulo y otro para la semicircunferencia. Cambian de idea porque la profesora les orienta. La pareja 7 resuelve correctamente y para argumentar la elección del vector hablan de dirección y distancia, pero no hablan de sentido. Es un error de tipo 3, debido a un aprendizaje deficiente de las características que definen a un vector.

Un miembro de la pareja 4 (en esta sesión trabaja individualmente) y la pareja 5 cometen errores técnicos de tipo 8. La primera encuentra el centro de giro utilizando un procedimiento adecuado, pero no lo fija por lo que al realizar arrastre test desaparece, la segunda trabaja con los vértices de los rectángulos pero no los selecciona como puntos dentro de figura.

4.4.3. Análisis de las pruebas de evaluación.

En una prueba de clase, en la que participaron todos los componentes de la clase salvo dos, se plantearon tres actividades relacionadas con la unidad didáctica movimientos en el plano: Una pregunta es tipo test, otra de construcción de definiciones y la última una tabla para completar.

1.2 La composición de dos simetrías.

a) Mantiene la orientación.
b) Invierte la orientación.
c) Que mantenga o invierta la orientación depende de la posición del vector respecto al eje de simetría.
d) Es un giro.

En esta pregunta surgen dudas porque algunos alumnos plantean que puede haber dos respuestas correctas. Efectivamente, la composición de dos simetrías mantiene la orientación y también puede ser un giro. La profesora resuelve esta duda, afirmando que tienen que marcar la que ocurra siempre. Diez de los dieciocho participantes en el estudio, responden adecuadamente. Una persona responde que invierte la orientación y cuatro marcan la opción de que se trata de un giro.

Define con tus palabras:

a) Punto fijo
b) Simetría respecto a una recta.
c) Eje de simetría.
d) Vector de traslación.

En el caso de la definición de punto fijo, hay varias definiciones incompletas o incorrectas debidas a un aprendizaje deficiente fruto de asociaciones incorrectas. Por ejemplo:

"Se refiere a los vértices de aquellas figuras que no se pueden agrupar en un mismo lugar o punto del plano."

"Punto en el cuál coinciden los puntos de dos simetrías al ser desplazadas."

"Es un punto que siempre se mantiene y que comparten ambas figuras."

"En movimientos en el plano llamamos punto fijo al punto en el que coinciden los vértices de distintos polígonos."

"Es aquel inamovible en el que coinciden en común dos o más figuras."

“Es el punto que puede ser cualquiera (en la figura o fuera de ella) que utilizaremos para hacer girar una figura (en el caso de un giro). Ejemplo: el punto fijo en el giro.”

En general, los alumnos definen simetría y eje de simetría de una manera correcta. Hay un caso en el que el alumno confunde causa con consecuencia y se llega a una inferencia no válida lógicamente: *“Es la recta o eje en el que coinciden todos los puntos de ambas figuras.”*

La mayoría de las definiciones de vector de traslación son incorrectas o incompletas:

“Línea que indica la distancia y la dirección para realizar una traslación.”

“Es una flecha que indica la separación de la simetría.”

“Sirve para deslizar puntos, segmentos, polígonos, etc. Por el espacio del plano.”

“Es la dirección sobre la cual se dirige la traslación de una figura.”

“Es un elemento que forma parte de la isometría conocida como traslación Indica el recorrido de la figura imagen respecto a la original.”

“Es un vector que traslada la figura de un sitio a otro, la figura mantiene la orientación y no tiene ningún punto fijo.”

“Una traslación es un movimiento en el cual una figura se desplaza en cualquier dirección, manteniendo la orientación. Este movimiento está sujeto a un vector que determina paralelamente la dirección y la distancia del movimiento. La distancia va a ser aquella entre uno de los puntos de la figura y su imagen. La distancia entre A y A’ tiene que ser la misma que entre B y B’ y C y C’. El vector no tiene por qué aparecer uniendo ambos puntos pero se tiene que corresponder con esa medida.”

“Valores sobre los que se va a trasladar una figura en el plano.”

“Es el vector que indica la dirección en la cual se producirá una traslación entre dos figuras.”

“Dirección que sigue la figura sobre la que se ha realizado una traslación.”

"Es la medida que utilizaremos para realizar una traslación de la figura inicial." Esta persona explica mediante un dibujo, en el que aparece un vector pero traslada utilizando otro.

Completa la tabla:

Tabla 10 Clasificación y características de los movimientos

NOMBRE DEL MOVIMIENTO	***¿Mantiene la orientación?***	***Puntos fijos***	***Número de simetrías que lo componen***
	Sí	*TODOS*	
Simetría deslizante	*No*		*3*
		RECTA	*1*
Traslación		*NINGUNO*	
Giro	*Sí*		*2*

En cuanto a la tabla, la columna que causa más confusiones es la última. El grupo había trabajado un cuadro similar con anterioridad en clase, tanto en el aula de informática como en la discusión en gran grupo.

En el examen final de la asignatura, se plantea una pregunta tipo test y una pregunta de aplicación, utilizando como herramienta lápiz y papel. Respondieron a estas preguntas los 18 alumnos del grupo.

1.2. Al cuadrilátero de la imagen se le ha aplicado:

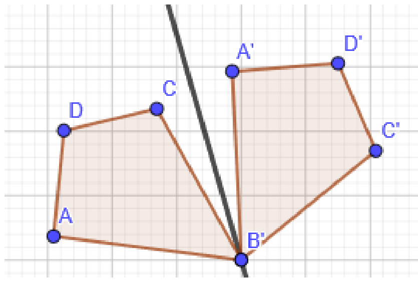


Figura 31 Cuadrilátero al que se ha aplicado isometría. Pregunta test

a) Giro
b) Traslación
c) Simetría
e) Identidad

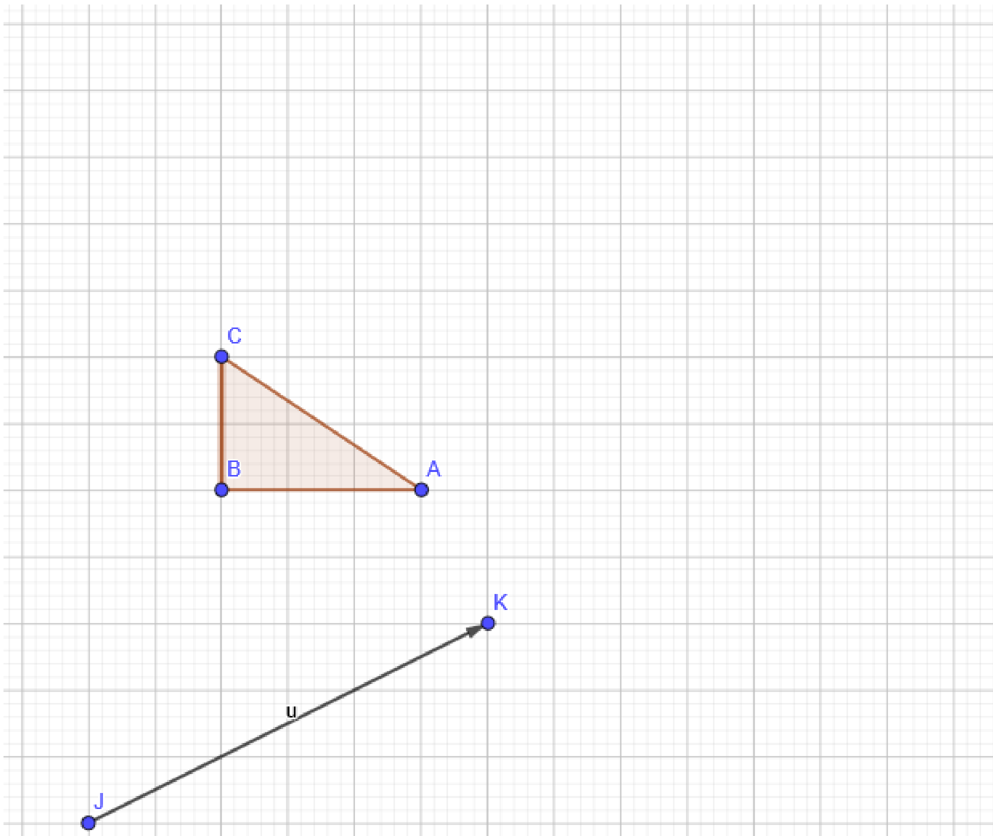


Figura 32 Triángulo y vector

a) *Dado el triángulo de vértices A, B, C, se pide aplicar la composición de dos movimientos: En primer lugar, giro de 90º en el sentido de las agujas del reloj y de centro el punto C (nombra las imágenes de los vértices con A', B', C'). En segundo lugar, una traslación con vector **u** (nombra las imágenes de los vértices con A'', B'', C'')*
b) *¿Cuál es el nombre del único movimiento que es equivalente a la composición de los dos movimientos aplicados?* **Respuesta:**

Solamente dos personas responden incorrectamente a la pregunta tipo test, indicando que se trata de una simetría. Es posible que se deba a que se ha dibujado una recta y no se paren a comprobar las características del movimiento como que mantiene la orientación (figura 31).

En cuanto a la segunda pregunta, cuatro alumnos no han interiorizado qué es composición de movimientos por lo que en el apartado a realizan cada uno de los movimientos por separado. Otro fallo que se repite en dos alumnos, es que consideran que el vector solamente define la distancia a la que tiene que estar la imagen, sin considerar dirección ni sentido. Siete de los alumnos responden perfectamente al apartado a.

Ocho personas responden incorrectamente al apartado b, diciendo que se trata de una simetría deslizante. Otras respuestas incorrectas que no se repiten:

"Simetría Axial."

"Traslación."

"La composición de los dos movimientos aplicados (giro y traslación) se denomina giro y traslación."

Tres de los dieciocho alumnos responden al ejercicio completo con una resolución perfecta.

4.4.4. Resultados de la encuesta sobre GeoGebra.

Al finalizar el taller piloto, se pide a los alumnos que han asistido asiduamente que rellenen una encuesta para conocer su opinión y sugerencias. Esta información se utiliza para mejorar el diseño de la secuencia didáctica de nuestra investigación.

Encuesta sobre GeoGebra
En una **escala del 1 al 5** donde: 1 → "totalmente en desacuerdo" 2 →"parcialmente en desacuerdo" 3 → "ni en desacuerdo ni de acuerdo" 4 → "parcialmente de acuerdo" 5 → "totalmente de acuerdo" Por favor, valora tu grado de acuerdo con las siguientes afirmaciones. **Contesta con sinceridad, la información servirá para diseñar un taller de GeoGebra para el próximo curso. Gracias.** **1.** GeoGebra me resulta fácil de usar. **2.** Prefiero resolver problemas de geometría con lápiz y papel que con GeoGebra. **3.** GeoGebra me ayuda a entender relaciones entre los objetos geométricos. **4.** Trabajar con GeoGebra es aburrido. **5.** Con GeoGebra puedo comprobar conjeturas visualmente con facilidad. **6.** Creo que GeoGebra sirve para enseñar geometría en Primaria. **7.** GeoGebra añade algo a la experiencia de aprendizaje. **8.** Me resulta más fácil bloquearme con GeoGebra que con lápiz y papel **9.** GeoGebra me ayuda a explorar, experimentar y hacer conjeturas. **10.** Prefiero trabajar en el ordenador solo/a que con pareja. **11.** Con GeoGebra los estudiantes se interesan y entienden de qué se trata. **12.** Usando GeoGebra resulta difícil tomar la iniciativa para resolver problemas nuevos.

13. Usar GeoGebra me puede ayudar a mejorar mis conocimientos geométricos.
14. Creo que GeoGebra me ayudará a enseñar matemáticas a mis alumnos.
15. Tener que explicar el proceso utilizado en la resolución de una actividad me sirve para mejorar en el uso del lenguaje matemático adecuado.
16. Resulta útil discutir en gran grupo para la comprensión de conceptos geométricos.
17. Afianzo conocimientos cuando explico a los demás cómo he resuelto un problema.
18. Cuando mis compañeros me explican cómo han resuelto una actividad que tiene que ver con la geometría, a veces descubro errores que han cometido.
19. Cuando mis compañeros me explican cómo han resuelto una actividad que tiene que ver con la geometría, entiendo mejor los conceptos.
20. El tema de movimientos en el plano me resulta interesante.
21. Cuando estamos en el aula clase y la profesora hace un repaso de lo que hemos construido con GeoGebra, afianzo mis conocimientos.
22. Explicar el proceso que he utilizado para resolver un problema enriquece mi propio aprendizaje.
23. La secuencia de actividades ha estado suficientemente planificada.
24. ¿Tienes algún comentario o sugerencia respecto al taller de GeoGebra?

En la tabla 11 recogemos los resultados de la encuesta con la frecuencia de respuesta en cada modalidad. En la figura 33 observamos el gráfico de frecuencias correspondiente a esta tabla.

Tabla 11 Resultados de la encuesta sobre el taller piloto 1

Resultados de la encuesta sobre GeoGebra						
	Frecuencia de cada categoría (grado de acuerdo)					
Nº de pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**no responde**
1	1	3	1	11	1	
2	5	2	6	1	3	
3	1	1	2	7	6	
4	5	4	5	2	1	
5		2	1	5	8	1
6	4	3	1	5	4	
7		1	6	3	7	
8	3	4	7	2	1	
9	1	2	2	5	7	
10	12	1		3	1	
11		1	6	9	1	
12	1	3	8	4	1	
13		3	3	9	2	
14	4	1	4	5	3	
15	2	3	4	4	4	
16	1	1	5	6	4	

17	1		4	5	7	
18	2	1	5	8	1	
19	1	2	3	7	4	
20	4	3	3	4	3	
21		3	3	4	7	
22	1	1	5	5	5	
23		2	3	8	4	

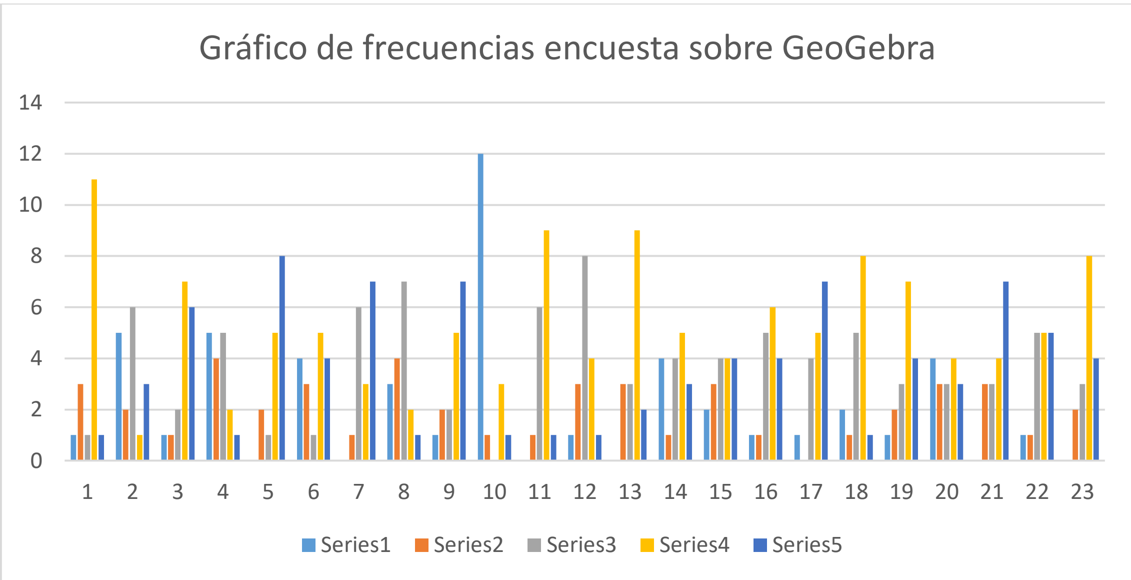


Figura 33 Gráfico de frecuencias de la encuesta sobre el taller piloto 1

Analizando las 17 encuestas recogidas, podemos observar que los maestros en formación creen que GeoGebra es una herramienta fácil de usar, que provoca que los alumnos se interesen y entiendan de qué se trata, que les permite comprobar visualmente conjeturas con facilidad y les ayuda a mejorar los conocimientos geométricos. Consideran que afianzan conocimientos cuando explican a los demás y que cuando los compañeros explican cómo han resuelto una actividad entienden mejor los conceptos y, a veces, descubren errores que los otros han cometido. Además, consideran que repasar en el aula clase sirve para afianzar los conocimientos.

En cuanto a la organización del taller, es muy significativo que el 70,59% de los alumnos hayan contestado con un 1 a la afirmación *"Prefiero trabajar en el ordenador solo que con pareja"* y el mismo porcentaje ha respondido con un 3 o un 4 a la afirmación *"La secuencia de actividades ha estado suficientemente planificada".*

Como sugerencia para mejorar el taller de GeoGebra, se repite mayoritariamente el interés por una sesión o un glosario sobre el manejo de la herramienta, que se había supuesto que dominaban porque se utilizaba en una asignatura del curso anterior (Matemáticas y su Didáctica II). Por otro lado, también destaca que consideran que utilizar durante dos cursos la misma herramienta resulta repetitivo. Podemos resumir otras opiniones y sugerencias de alumnos como las siguientes:

"Creo que hoy en día, las tics son muy importantes y enseñar matemáticas a partir de ellas es muy interesante.

También los alumnos prefieren trabajar con ordenadores en vez de con lápiz y papel."

"Hemos realizado muchos ejercicios pero ninguno aplicado a primaria, con lo cual, no somos capaces de utilizar la herramienta con fines educativos aunque la entendamos y sepamos utilizarla."

4.4.5. Conclusiones extraídas del taller piloto.

Tras el análisis realizado del taller piloto, extraemos conclusiones de la observación directa del desarrollo y de las opiniones que los alumnos han manifestado en la encuesta final:

1. GeoGebra permite comprobar fácilmente conjeturas y propiedades que son difíciles de realizar con lápiz y papel.
2. Trabajar en parejas y tener que comunicar los resultados parece mejorar el uso del vocabulario geométrico y su comprensión.

3. La escritura de los argumentos utilizados en cuadros de textos, en las propias actividades, aparentemente mejora el vocabulario y afianza conocimientos. Además, ayuda a la profesora a detectar la condicional lógica que utilizan los alumnos para responder a la actividad.
4. Discutir en gran grupo en el aula clase, ayuda a los alumnos a afianzar conocimientos, entender mejor los conceptos y a descubrir errores que han cometido.
5. Los errores que más se han repetido son: técnicos, de lenguaje, debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento y debidos a aprendizaje deficiente de hechos, destrezas o conocimientos previos.

Algunas dificultades que hemos observado deben ser tenidas en cuenta en el futuro: los estudiantes no utilizan desde el principio la naturaleza dinámica de la herramienta debido a sus experiencias previas de aprendizaje estático. Los propios alumnos solicitan un glosario sobre los elementos fundamentales de GeoGebra. Debemos suponer al inicio de curso que el nivel de instrumentalización es bajo. En el próximo curso vamos a introducir alguna sesión previa para asegurarnos de que tienen el nivel de instrumentalización. Aunque lo han utilizado anteriormente, no han usado el carácter dinámico.

Este taller piloto forma parte de la parte experimental de la investigación, la información extraída nos ha servido para diseñar el taller de GeoGebra del curso 19-20.

4.5. Taller piloto 2

El segundo taller piloto se desarrolla durante cuatro sesiones dobles en el mes de octubre de 2019, con el grupo de alumnos de 4º B del Grado de Magisterio de Educación Primaria del centro de Estudios Superiores Don Bosco (Centro adscrito a la Universidad Complutense de Madrid), dentro de la asignatura Matemáticas y su Didáctica III. En esta ocasión, los alumnos trabajan en parejas en el aula de informática, la resolución de los cuatro problemas que componen la secuencia didáctica y alternamos con discusión en gran grupo en el aula clase.

Antes de comenzar el taller piloto, habían tenido lugar tres sesiones dobles del tema movimientos en el plano:

1. En el aula-clase utilizando material manipulativo: Se crea la necesidad de utilizar los elementos que definen los movimientos para describir cambios de posición en un plano. Concluimos con traslación, giro, simetría y sus elementos.
2. En el aula de informática. Esta sesión surge de la necesidad detectada en el taller piloto del curso anterior de asegurarnos del nivel mínimo de instrumentalización del SGD con el que comenzamos el taller.
3. En el aula-clase, una pareja expone las actividades realizadas en la sesión anterior. Ampliamos contenidos sobre movimientos en el plano: simetría deslizante es la composición de una simetría y una traslación.

El grupo participante está compuesto por 54 alumnos, de los cuales asisten a clase normalmente un máximo de 44, que se agrupan por parejas según afinidades personales. Las parejas no son estables, ya que en ocasiones algún miembro de la pareja se ausenta y se agrupan de manera diferente en la siguiente sesión.

4.5.1. Secuencia didáctica

Presentamos el enunciado del primer problema.

PROBLEMA 1:

Una empresa ha diseñado un juego para niños que permite armar figuras como el dibujo siguiente.

Figura 34 Juego para niños. Problema 1

Construye la figura anterior, aplicando un giro, una traslación, una simetría y una simetría deslizante a las piezas siguientes, según corresponda.

Señala en cada pieza, mediante un cuadro de texto, el nombre del movimiento que has aplicado y su(s) elemento(s).

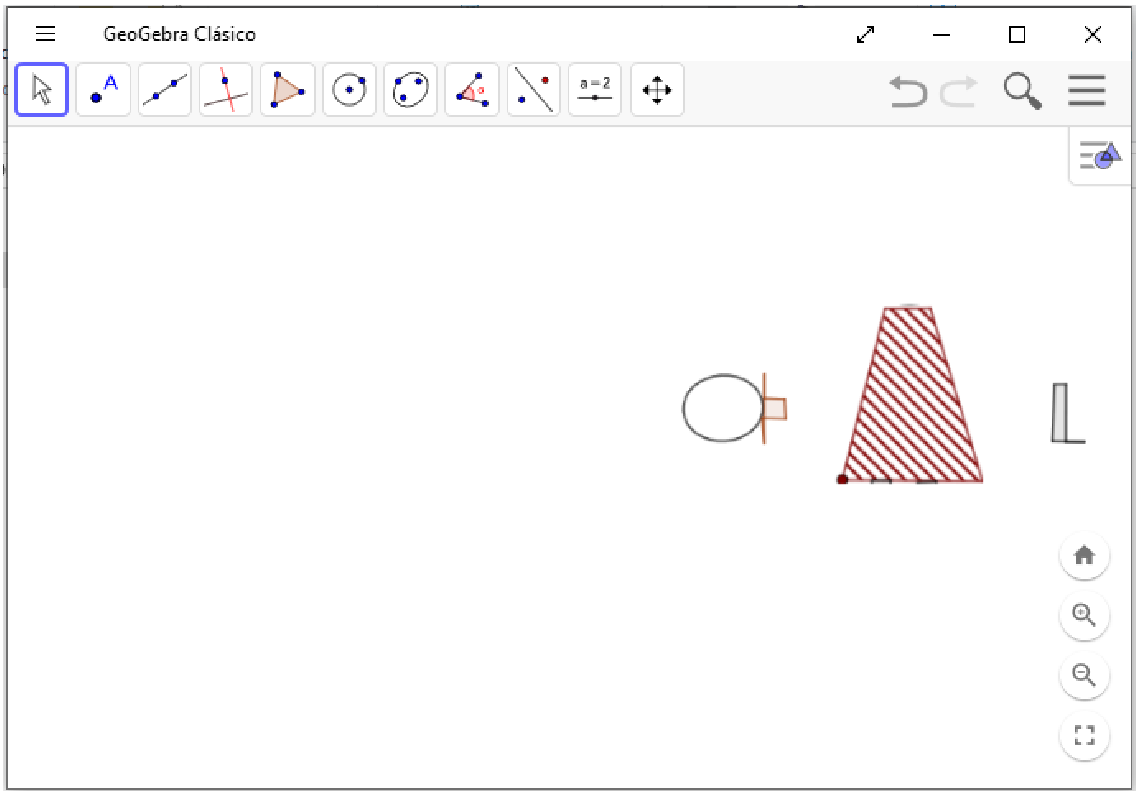


Figura 35 Piezas. Problema 1

Los alumnos muestran muchas dificultades para ver que el trapecio de la figura que deben armar es simétrico al trapecio de la figura de la que disponen. Por ello se ha visto necesario modificar esta pieza.

El problema 2 ya había formado parte de la secuencia de actividades del primer taller piloto. No ha sido necesario realizar ninguna modificación después de este taller.

A continuación, presentamos el enunciado del tercer problema.

PROBLEMA 3:

En la figura se muestra un fragmento de un recubrimiento del plano, elaborado por M.C. Escher.

Se han marcado tres peces con las letras F, G, H.

a) *¿Qué movimiento rígido hace coincidir F con G?*
b) *Explicad cómo habéis llegado a la conclusión de que se trata de ese movimiento.*
c) *En el caso de que sea un giro, representad el centro de giro. En el caso de que sea una traslación, representad el vector de traslación. En el caso de que sea una simetría, representad el eje de simetría.*
d) *¿Qué movimiento rígido hace coincidir F con H?*
e) *Explicad cómo habéis llegado a la conclusión de que se trata de ese movimiento.*
f) *En el caso de que sea un giro, representad el centro de giro. En el caso de que sea una traslación, representad el vector de traslación. En el caso de que sea una simetría, representad el eje de simetría*
g) *¿Qué movimiento rígido hace coincidir H con G?*
h) *Explicad cómo habéis llegado a la conclusión de que se trata de ese movimiento.*
i) *En el caso de que sea un giro, representad el centro de giro. En el caso de que sea una traslación, representad el vector de traslación. En el caso de que sea una simetría, representad el eje de simetría.*

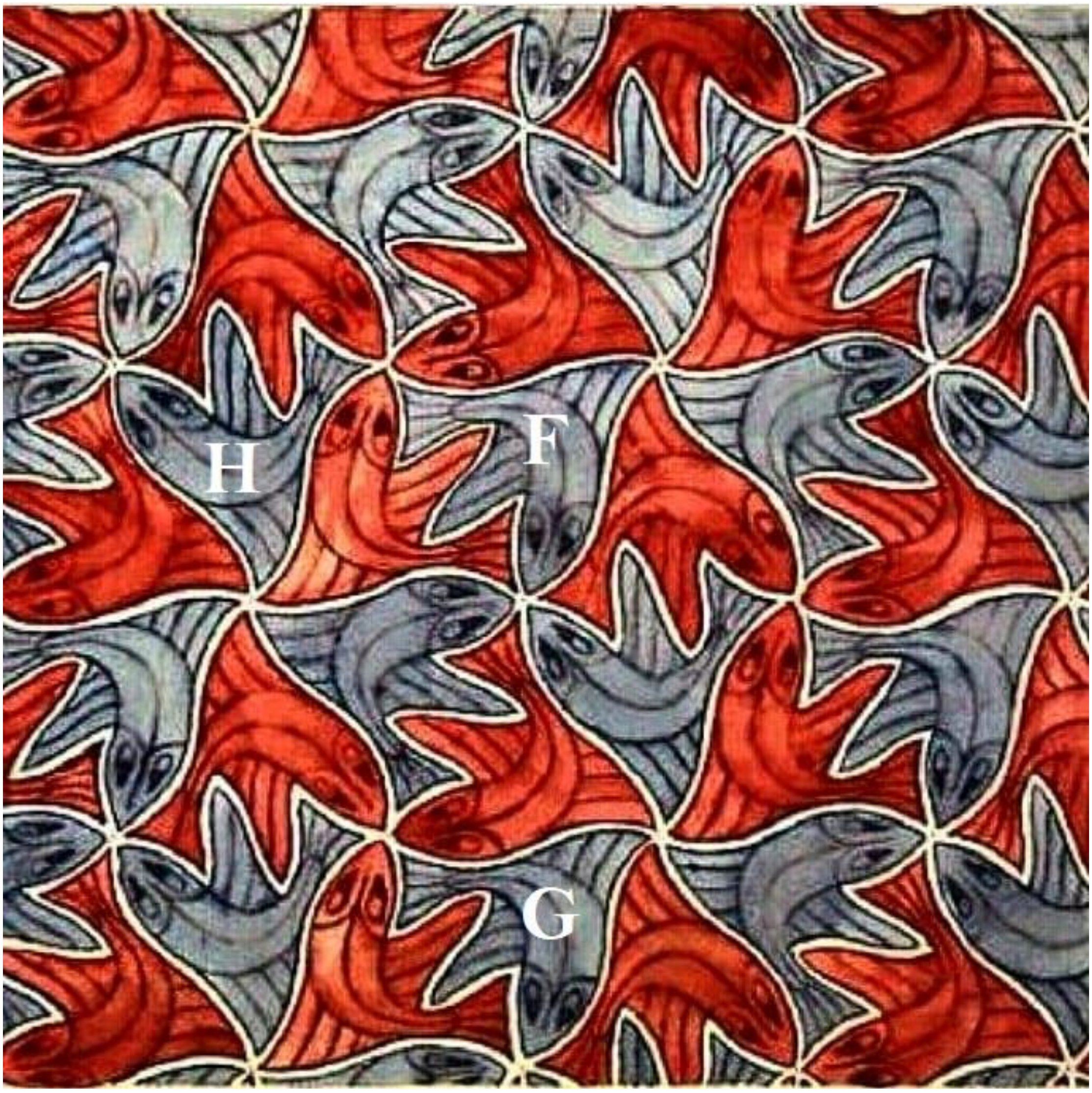


Figura 36 Fragmento de recubrimiento en el plano

(Escher, 1955)

Durante la aplicación de la sistemática se vio la necesidad de simplificar el enunciado. Además, muchos alumnos construyen polígonos irregulares encima de la figura para comprobar sus conjeturas. Se ha cambiado el tono con la intención de que las construcciones auxiliares y los elementos de los movimientos que pide el ejercicio no se confundan con el fondo.

Presentamos el enunciado del problema 4. Se sube al Campus Virtual un documento Word que contiene lo siguiente:

PROBLEMA 4

A partir del siguiente applet sobre giros y traslaciones, diseñado para estudiantes de primaria con edades comprendidas entre 6 y 8 años (Primero, Segundo o Tercero de Primaria), https://www.geogebra.org/m/Vu4gP2tG

Elegid un curso entre los tres posibles y

a) Elaborad dos preguntas sobre contenidos matemáticos adecuados al nivel del curso.

b) Diseñad un "árbol del problema" por cada pregunta.

*El apartado b, se entrega en papel.

*Tened en cuenta las rúbricas que se va a utilizar para la corrección.

Tabla 12 Rúbrica problema 4. Apartado a

RÚBRICA PROBLEMA 4. Apartado a.	SÍ	NO
¿La respuesta es acotada?		
¿Es fácil de contraejemplar?		
¿El lenguaje matemático es adecuado?		
¿Las preguntas se corresponden con los contenidos del currículo del curso?		

Tabla 13 Rúbrica problema 4. Apartado b

RÚBRICA PROBLEMA 4. Apartado b.	SÍ	NO
¿Representa un proceso lógico para la resolución del problema planteado?		
¿Tiene en cuenta tanto las respuestas correctas como las incorrectas?		
¿Para las respuestas incorrectas, incluye preguntas o comentarios para redirigir el proceso de resolución?		

¿Para las correctas, incluye preguntas de ampliación?		
¿Está abierto a la posibilidad de crear nuevas ramas en distintas intervenciones?		

**Los contenidos asociados a Orientación Espacial de los cursos, según el Decreto Currículo de la Comunidad de Madrid son los siguientes.*

1º Primaria

Orientación espacial. Situación en el plano y en el espacio.

34. Localiza partes del propio cuerpo y describe la posición de objetos del entorno respecto de uno mismo o de otro ser u objeto, utilizando descriptores: delante/detrás, arriba/abajo, derecha/izquierda, encima/debajo, etcétera.

35. Coloca un objeto o se coloca él mismo en una determinada posición, para situarlo o situarse delante o detrás, a la derecha o a la izquierda, encima o debajo de otro objeto o ser diferente.

36. Ejecuta consignas dadas en términos de hacia delante/hacia atrás, hacia arriba/hacia abajo, hacia la derecha/hacia la izquierda, en ejercicios psicomotores variados: mirar, girar, caminar, etcétera.

37. Describe y reconoce situaciones de un objeto respecto de otro: delante/detrás de, a la derecha/izquierda de, encima/debajo de.

2º Primaria

Orientación espacial. Situación en el plano y en el espacio.

31. Reconoce de un objeto, cuando las hay, su parte de delante/detrás, de arriba/abajo, de la derecha/izquierda.

32. Describe y dibuja recorridos de caminos sobre una red cuadriculada, utilizando de forma combinada las direcciones: arriba, abajo, derecha e izquierda.

33. Indica con precisión (subir/bajar, girar a la derecha/izquierda...) la forma de llegar de un lugar a otro en las dependencias escolares.

Rectas paralelas y perpendiculares. Elementos de un polígono. Construcción de triángulos y rectángulos.

34. Clasifica las líneas en rectas, curvas, mixtas y poligonales y busca ejemplos en objetos del entorno.

35. Asocia el concepto de punto con la intersección de dos líneas o con una posición en el plano.

36. Reconoce, entre una serie de figuras, las que son polígonos y los nombra según su número de lados.

37. Utiliza con propiedad los conceptos de lado y vértice en un polígono e identifica el número de lados y vértices de un polígono dado.

3º Primaria

Orientación espacial. Sistema de coordenadas cartesianas.
48. Describe recorridos representados sobre una cuadrícula, precisando direcciones, sentidos y distancias.
49. Localiza puntos y cuadraditos sobre cuadrícula con una referencia ortonormal, utilizando coordenadas cartesianas.
Ángulos y su clasificación. Construcción de triángulos y cuadriláteros.
50. Identifica y define ángulo recto y grado, y clasifica los ángulos en agudos rectos, obtusos, llanos, mayores de 180° y completos.
51. Relaciona el concepto de ángulo con el de giro.
52. Utiliza transportador y regla para medir y reproducir un ángulo dado.
53. Distingue las posiciones relativas de rectas en el plano: paralelas y secantes (perpendiculares y oblicuas).
54. Reconoce, describe, nombra y reproduce (con regla y escuadra o a mano alzada) figuras geométricas: cuadrado, rectángulo, rombo, trapecio y triángulos equiláteros, rectángulos e isósceles.

Finalmente, los alumnos únicamente elaborarán una para el curso elegido, una actividad que llamamos “desafío”. La rúbrica problema 4 apartado a (tabla 12) se ha modificado ligeramente para el estudio definitivo. Se considera importante que sea necesario utilizar el applet para la resolución del desafío, que el lenguaje sea adecuado, que el desafío esté en consonancia con el nivel del curso elegido y que se subrayen los estándares de aprendizaje evaluables presentes.

4.5.2. Análisis de aplicación de la sistemática en el taller piloto 2

Presentamos el estudio de las partes que constituyen la sistemática. En la mayoría, realizamos un único estudio para todos los problemas de la secuencia. En algunos casos, como anticipación, selección y conexiones se hace necesario hablar de cada uno por separado.

Anticipación

El instrumento “Árbol del problema” se utiliza para la realización de la anticipación. Hay un árbol para cada uno de los tres primeros problemas de la secuencia. La profesora habla en clase del árbol del problema para hacer a los alumnos conscientes de su utilización.

A continuación, presentamos cuáles son los árboles del problema que utilizamos en la prueba piloto. Esta herramienta está abierta a la posibilidad de crear nuevas ramas en las distintas intervenciones. Así, han sufrido variaciones para la siguiente aplicación de la sistemática.

Árbol del problema 1:

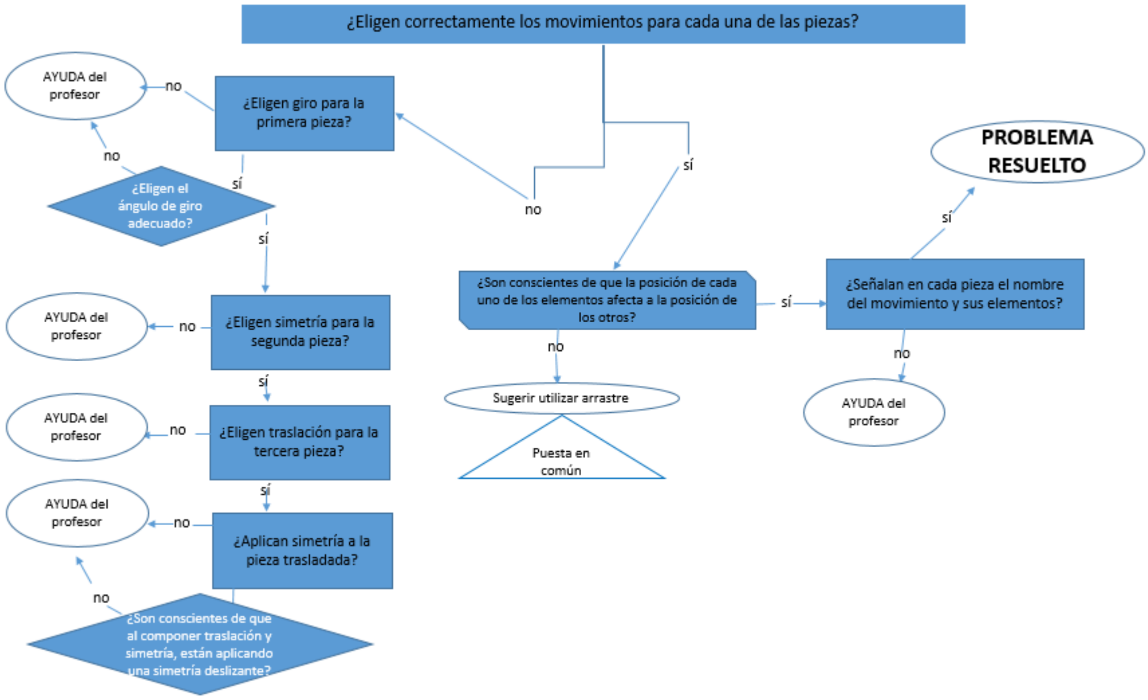


Figura 37 Árbol del problema 1

El objetivo de este problema es trabajar la elección y la construcción de movimientos rígidos, para ello los alumnos deben hacer explícitas un mínimo de propiedades geométricas necesarias. Además, deben identificar con su nombre cada uno de los movimientos y sus elementos.

No existe una única solución. Aunque solamente hay una correspondencia posible de movimientos a piezas, los elementos pueden colocarse de distintas formas. Sin embargo, la elección de la posición de uno de ellos condiciona a todos los demás. Así, si mediante el arrastre cambiamos la posición de unos elementos, se hace obligatorio cambiar todos los demás.

En el desarrollo del taller se observa que todas las parejas que resuelven la actividad de manera correcta realizan en primer lugar la simetría del trapecio. Por ello, cambiamos el orden de la elección de los movimientos en esa rama para la anticipación del taller del experimento. Algunas parejas no recuerdan qué es simetría deslizante y/o no están familiarizados con la expresión “componer movimientos” por lo que también surge la necesidad de añadir comentarios en esa parte.

Árbol del problema 2:

Nuestros alumnos no están acostumbrados a trabajar la geometría en un contexto dinámico, por ello no utilizan el arrastre de manera inmediata cuando abren la actividad, lo hacen después de que la profesora lo sugiera.

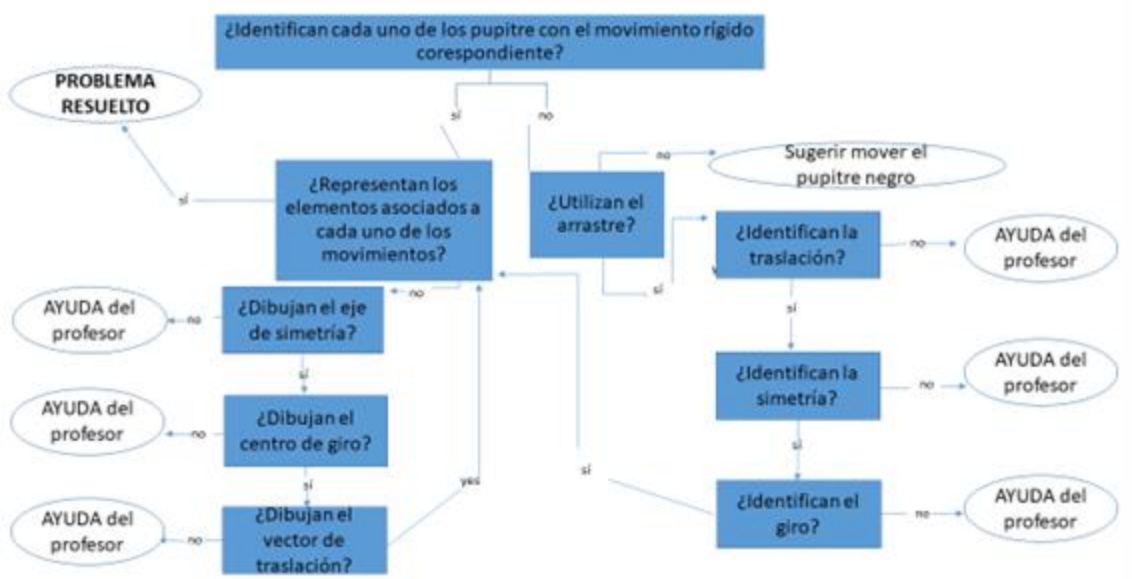


Figura 38 Árbol del problema 2

En este taller piloto se observa que cometen errores en la identificación de movimientos de los que son conscientes cuando intentan dibujar los elementos. Muchas parejas construyen los elementos por tanteo. Por ejemplo, en el caso de la simetría dibujan una recta y hacen el simétrico del primer pupitre, si no encaja a la perfección con el que ya está dibujado, mueven la recta. Uno de los objetivos de este problema es el aprendizaje de la construcción de los elementos esenciales de transformaciones en el plano, dadas figuras homólogas. Con la intención de anticiparnos a posibles procedimientos por tanteo, hemos modificado esa parte del árbol.

Árbol del problema 3:

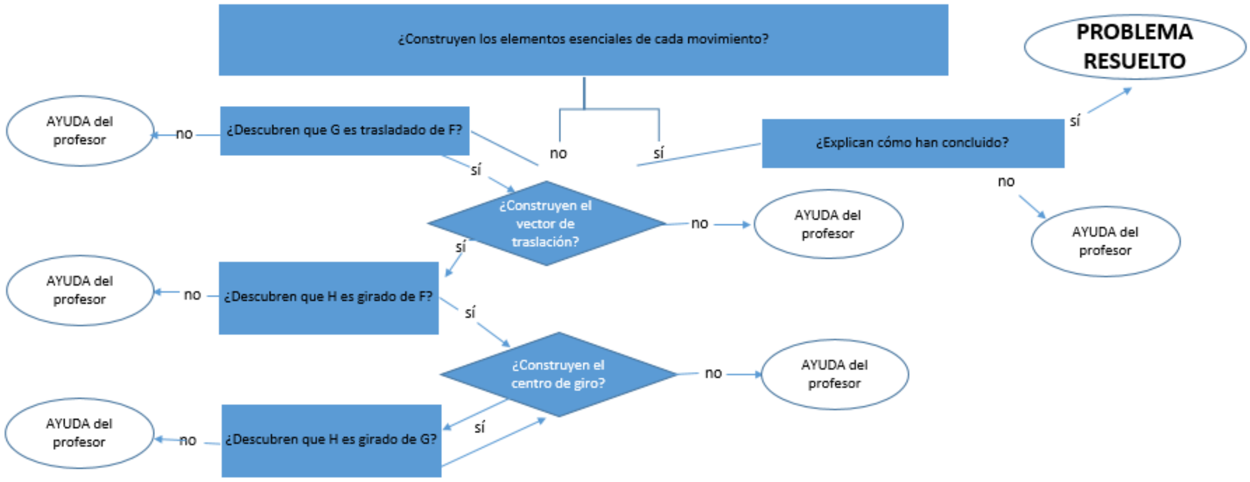


Figura 39 Árbol del problema 3

Durante la aplicación de la sistemática en el segundo taller piloto, se observa que los alumnos necesitan especial ayuda en la identificación del movimiento que transforma H en G. Les resulta fácil identificar un giro cuando el centro se encuentra dentro de la figura, pero no es así cuando el centro está a una determinada distancia. Por ello, se ha visto necesario añadir preguntas guía para esta parte.

Configuración didáctica

Los estudiantes trabajan en parejas en el aula de informática, que dispone de una pizarra velleda y un proyector. En el aula clase, donde se realizan las discusiones en gran grupo se dispone de pizarra digital.

Todos los ordenadores están provistos de conexión a Internet y contienen el programa específico GeoGebra. Las actividades se suben al Campus Virtual justo antes de comenzar la sesión y los alumnos deben presentarlas a través de esta herramienta antes de finalizar la sesión doble.

La conexión a internet en muchas ocasiones es lenta en el aula de informática y el Campus Virtual deja de funcionar en algunos momentos.

Modo de explotación

En primer lugar, proponemos que se trabaje brevemente de manera individual, para que cada alumno se sitúe en el contexto del problema. A continuación, en un espacio de trabajo por parejas compartiendo un ordenador con el programa GeoGebra se pretende que los alumnos experimenten, conjeturen y hagan una propuesta de solución. Finalmente, en otra sesión ordinaria en clase, participan en una discusión en gran grupo usando la pizarra digital para poner en común el trabajo realizado en parejas y tratar aquellos temas que no se han explorado.

En los problemas del 1 al 3 haremos que uno de los alumnos – o una pareja – salga a exponer su solución, siendo una orquestación del tipo *Trabajo del Sherpa* (Drijvers et al., 2010). El alumno utilizará la tecnología para explicar cómo ha resuelto el problema y la profesora irá haciendo preguntas tanto a la pareja que actúa como sherpas como al resto del grupo para que formalicen conceptos, casuísticas y casos particulares. En cada caso, se seguirá el guion marcado por el árbol del problema.

En la discusión en gran grupo del problema 4, es la profesora quien expone varias soluciones presentadas por distintos alumnos a la vez que plantea preguntas al grupo.

Monitorización

Según Smith y Stein (2018) la monitorización consiste en prestar atención al pensamiento matemático de los alumnos mientras trabajan en el problema para escoger sobre qué solución hacer el andamiaje de la discusión en gran grupo.

Además, en esta etapa la profesora ayuda a los alumnos a clarificarse. En todo momento, sigue el árbol del problema, haciendo conscientes a los alumnos de su uso. Debido al volumen del grupo, esta tarea puede resultar complicada pero es capaz de situar rápidamente en qué posición del árbol se encuentran, así no pierde mucho tiempo en interpretar los pasos que han dado en la resolución y sí, en cambio en elegir minuciosamente el tipo de mensajes que dar.

Selección

La fase de selección ha sido distinta para cada uno de los problemas. En el Problema 1, una pareja se ofrece voluntaria. Surgen oportunidades de revisar las características de los distintos elementos. Después de realizar la composición de simetría y traslación, los alumnos se interesan por qué movimientos originan otras composiciones.

En el caso del problema 2 se selecciona a una pareja que ha encontrado todos los elementos por tanteo, lo cual genera la oportunidad de discutir qué características y posiciones tienen los elementos para poder ser encontrados utilizando un procedimiento. Una segunda pareja es seleccionada para resolver cómo encontrar el centro de giro, construyendo mediatrices.

Para el problema 3 se selecciona a una pareja que ha identificado la traslación y el giro de F a H. Además, ha encontrado el vector de traslación y el eje de simetría, pero no el centro de giro de H a G. Se trata de una situación que se ha repetido en muchas parejas. Para resolver esta última parte, se ofrece una pareja voluntaria.

Por las características propias de la última actividad, que es de corte didáctico, no se selecciona ninguna pareja. Es la profesora quien orquesta la discusión, poniendo ejemplos de algunas actividades y árboles de problema diseñados por los alumnos. Provoca al grupo para que intervengan en la discusión desde sus asientos.

Implementación didáctica

La implementación puede entenderse cómo el resultado de la preparación del modo de explotación (Morera, 2013).

La primera sesión doble tuvo lugar en el aula de informática, los alumnos realizaron los problemas 1 y 2 que se discutieron al día siguiente en una sesión doble en el aula-clase. En la tercera sesión doble realizaron los problemas 3 y 4. Se observa que la resolución del problema 3 les lleva más tiempo que la de los dos primeros. La última sesión doble es de puesta en común de los problemas 3 y 4.

En el planteamiento inicial se había decidido seguir el guion marcado por los árboles del problema que detallamos en la fase "anticipación". Se ha visto necesario modificar este guion para el correcto desarrollo de la discusión en gran grupo en la siguiente aplicación de la sistemática.

Secuenciación

Para la planificación de la secuenciación se utilizan los estadios de discusión de un problema. Observando a posteriori los estadios que se han seguido en cada problema, notamos que la discusión queda bastante organizada. Sin embargo, algunos alumnos no participan en la discusión. Esto último, probablemente sea debido al tamaño del grupo y a no estar acostumbrados a trabajar con esta metodología.

Conexiones

En el caso del problema 1, se pide construir una determinada figura, lo que exige al alumno hacer explícitas una serie de propiedades geométricas. En la discusión en gran grupo se consigue especificar las características que deben tener los movimientos aplicados a cada uno de los elementos, dentro de que existe cierta libertad, pero una vez elegido uno de ellos, el resto está obligado a tomar una determinada posición. Además, se han ampliado contenidos del problema, conectando con la composición de giro y traslación, simetría y giro, dos simetrías, etc.

En el caso del problema 2, concluimos con los procedimientos geométricos para encontrar cada uno de los elementos que definen los distintos movimientos en el plano. Una conexión que se evidencia es la que realiza la pareja que es seleccionada en primer lugar para hacer el trabajo del sherpa: habían considerado que el vector era un elemento estable que no se podía arrastrar por la pantalla, pero en su participación en la discusión infieren que el vector puede ocupar cualquier lugar del espacio y siempre será el mismo si no cambia módulo, dirección ni sentido. Además, al finalizar la sesión doble, en la que hemos realizado las discusiones en gran grupo sobre los dos primeros problemas, completamos la tabla siguiente:

Tabla 14 Movimientos en el plano: puntos fijos y orientación

NOMBRE DEL MOVIMIENTO	Puntos fijos	¿Mantiene o invierte la orientación?
TRASLACIÓN	Ninguno	Mantiene
GIRO	Uno (centro de giro)	Mantiene
SIMETRÍA	Recta (eje de simetría)	Invierte
SIMETRÍA DESLIZANTE	Ninguno	Invierte

Como los alumnos son conscientes en todo momento de la utilización del árbol del problema, la profesora muestra su estructura y los cambios que se han llevado a cabo después de la observación de la resolución en el aula de informática y de la corrección de los archivos.

En la resolución del problema 3, recordamos que la composición de un giro y una simetría es un giro. Un alumno pregunta cómo encontrar el centro de giro de otros elementos de la pintura de Escher, lo que nos sirve para generalizar las conclusiones obtenidas.

En el caso del problema 4, no hay alumnos que hagan trabajo del sherpa. Sin embargo, sí hay una puesta en común orquestada por la profesora. Muestra el ejemplo de un enunciado y un árbol del problema asociado y sus beneficios y carencias.

4.5.3. Aplicación del instrumento de análisis TRU-Math a la implementación de la secuencia.

Aplicamos el instrumento de análisis de clases de Schoenfeld (2013) . El objetivo es comprobar a grandes rasgos que la secuencia preparada para la sistemática ha representado una práctica matemáticamente robusta para los estudiantes.

Aunque el instrumento se aplica a la secuencia general y no a cada problema en concreto, para completar la última columna analizamos principalmente el problema 4.

Tabla 15 TRU-Math aplicado a la implementación de la secuencia

	Matemáticas	Demanda cognitiva	Acceso	Organismo: autoridad y responsabilidad	Uso de la evaluación	Aprendizaje didáctico
Planteamiento	3	3	2	2	3	3
Exposición del profesor	3	3	2	3	3	3
Discusiones en gran grupo	3	3	1	3	3	2
Trabajo en grupos reducidos	3	3	3	3	3	3
Presentaciones de los estudiantes	3	2	1	3	3	1
Presentación de confusiones o ideas erróneas.	3	3	2	3	3	2

Si nos fijamos en la representación global, en general podemos decir que la implementación de la secuencia didáctica ha sido satisfactoria, aunque es mejorable en algunos aspectos. Las matemáticas y el uso de la evaluación son los aspectos más potentes de la secuencia, mientras que el acceso es el punto más débil. Este aspecto se tendrá en cuenta para la siguiente implementación de la secuencia, en el experimento de tesis. Dado el número de alumnos y la poca experiencia previa de éstos trabajando estas situaciones, es difícil conseguir la dinámica en pocas sesiones de clase.

Los alumnos no han presentado los resultados obtenidos en el problema 4, por ello este apartado cuenta con una puntuación baja en la columna de aprendizaje didáctico.

4.5.4. Resultados de la encuesta sobre GeoGebra

Al finalizar el taller piloto se pide a los alumnos que completen la misma encuesta que completaron los que asistieron al primer taller piloto. Las respuestas obtenidas se resumen en la siguiente tabla. Responden a la encuesta 35 alumnos.

En la tabla 16 recogemos los resultados de la encuesta con la frecuencia de respuesta en cada modalidad. En la figura 40 observamos el gráfico de frecuencias correspondiente a esta tabla.

Tabla 16 Resultados de la encuesta sobre el taller piloto 2

Resultados de la encuesta sobre GeoGebra						
	Frecuencia de cada categoría (grado de acuerdo)					
Nº de pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**no responde**
1	1	4	8	19	3	
2	3	6	12	9	4	1

3	3	4	5	13	10	
4	2	13	14	6		
5			9	14	11	1
6	1	5	10	12	7	
7	1		12	18	4	
8	4	4	15	9	4	
9		3	11	13	8	
10	13	12	3	3	4	
11	2	7	13	13		
12	2	10	15	4	3	1
13		2	10	18	5	
14	2	3	12	14	4	
15		3	5	18	9	
16	1	5	10	8	11	
17		1	6	16	12	
18		5	8	12	10	
19		3	11	14	7	
20	5	5	12	9	3	1
21		2	9	12	12	
22			11	13	11	
23			10	16	9	

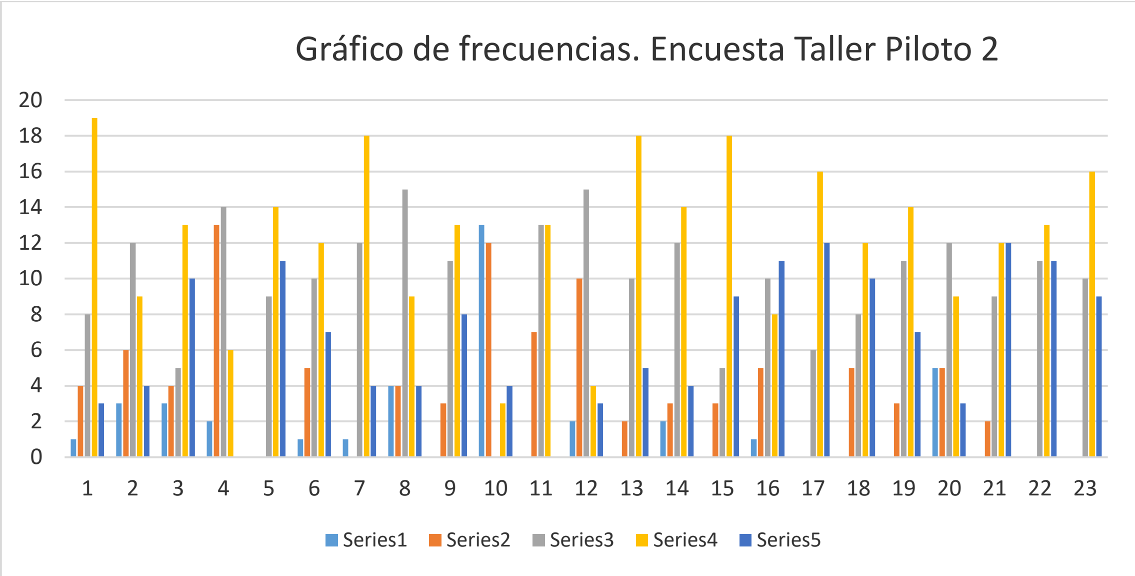


Figura 40 Gráfico de frecuencias de la encuesta del taller piloto 2

En esta ocasión, analizando las 35 encuestas recogidas, observamos que los estudiantes creen que GeoGebra es una herramienta fácil de usar y les puede ayudar a mejorar sus conocimientos geométricos. Consideran que afianzan conocimientos cuando explican a los demás y que cuando los compañeros explican cómo han resuelto una actividad entienden mejor los conceptos y, a veces, descubren errores que los otros han cometido. Además, consideran que repasar en el aula clase sirve para afianzar los conocimientos y explicar el proceso utilizado para resolver un problema enriquece su aprendizaje.

En cuanto a la organización del taller, es muy significativo que ningún alumno ha marcado con 1 ni 2 a la afirmación *"La secuencia de actividades ha estado suficientemente planificada"*, mientras que un 71,42% ha marcado un 3 o un 4. Llama la atención que ese mismo porcentaje ha marcado con 1 o 2 a la afirmación *"Prefiero trabajar en el ordenador solo/a que con pareja".*

Doce de los futuros maestros de primaria escriben algún comentario o sugerencia. Aparecen dos comentarios sobre la dificultad de instrumentalización de la herramienta y dos comentarios pidiendo que se explique con anterioridad a la realización del ejercicio el proceso a seguir para encontrar los elementos de los movimientos y así evitar que se encuentren por "tanteo". La mayoría del resto de comentarios, enfatizan alguna respuesta dada previamente en el comentario. Podemos resumir otras opiniones y sugerencias como las siguientes:

“Utilizar figuras de imágenes como la de los peces.”

“Algunas personas al no captar con la misma velocidad los contenidos de GeoGebra no logran terminar a tiempo en el periodo de clase, por lo que yo daría algo más de margen.”

“Me gustaría que fuese más práctico el taller de GeoGebra, porque expresarlo de forma teórica es bastante complicado.”

“Creo que es una herramienta apropiada para explicar los elementos en el plano de forma visual y atractiva.”

4.5.5. Conclusiones extraídas del taller piloto 2

Los distintos árboles del problema se elaboraron con la intención de plasmar de forma esquemática el estudio de la anticipación que un profesor podía llevar a cabo durante la resolución del problema (Morera, 2013). El objetivo no es utilizar el instrumento únicamente como contenedor de las diferentes estrategias de resolución del problema en un espacio reducido, si no también debe servir para dar indicaciones al alumno. De este modo, se han visto carencias y se han desarrollado para dar lugar a la estructura del árbol del problema 1 (figura 41, punto 5.1.1), árbol del problema 2 (figura 9, punto 3.5.1), árbol del problema 3 (figura 42, punto 5.1.1).

En cuanto a la secuencia de actividades, se observa la necesidad de modificar uno de los elementos del problema 1 para hacer más evidente la simetría. Además, se ha modificado el enunciado del problema 3 y aunque el elemento principal sigue siendo el mismo, hemos concluido que es más fácil trabajar sobre él cambiando el color.

En el caso del problema 4, se ha cambiado la estructura del enunciado. En lugar de diseñar dos actividades y sus correspondientes árboles del problema, en el experimento definitivo solamente diseñarán una actividad y su correspondiente árbol del problema. No creemos que mejore la competencia didáctica el diseño de dos problemas diferentes. La rúbrica para evaluar el enunciado que los alumnos diseñaban ha resultado difícil de aplicar en algunos casos, por lo que se han modificado las filas.

Si nos fijamos en los resultados obtenidos tras la aplicación del instrumento de análisis TRU-Math, en general podemos decir que la implementación de la secuencia didáctica ha sido satisfactoria, aunque es mejorable en algunos aspectos. Las matemáticas y el uso de la evaluación son los aspectos más potentes de la secuencia, mientras que el acceso es el punto más débil. La muestra de alumnos será menos numerosa y realizaremos alguna dinámica previa de discusión en gran grupo. Además, en el caso del problema 4 se seguirá la misma estructura que el resto, contando con una pareja que hagan el trabajo del “sherpa”.

De nuevo, los errores que más se repiten son técnicos, de lenguaje, debido a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento y debido a aprendizaje deficiente de hechos, destrezas o conocimientos previos. La escritura de los argumentos utilizados en cuadros de texto es lo que más dificultoso ha resultado para los alumnos, pero mejora el vocabulario y afianza conocimientos, además ayuda a la profesora a detectar la condicional lógica que utilizan los alumnos para responder a la actividad.

Los alumnos prefieren trabajar en parejas. Además, tener que comunicar los resultados aparentemente mejora el uso del vocabulario geométrico y su comprensión. Repasar en el aula clase sirve para afianzar los conocimientos. Cuando los compañeros explican cómo han resuelto una actividad entienden mejor los conceptos y, a veces, descubren errores que han cometido.

Este segundo taller piloto es parte experimental de la investigación, la información extraída nos ha servido para diseñar el taller de GeoGebra del grupo 4º A Bilingüe durante el curso 19-20.

Capítulo 5. Análisis de la aplicación de la sistemática

Siguiendo los objetivos que se plantean en este trabajo para responder a la pregunta de investigación, en este capítulo analizamos la sistemática de planificación, implementación y evaluación de la secuencia didáctica

5.1. Aplicación de la sistemática a la implementación de la secuencia didáctica

En este apartado exponemos el análisis de los procesos de diseño e implementación. La estructura que seguimos es idéntica a la del análisis de aplicación de la sistemática en el taller piloto 2 (apartado 4.5.2).

5.1.1. Anticipación

La anticipación de cada problema se llevó a cabo utilizando el instrumento “Árbol del problema”, diseñando uno para cada uno de los tres primeros problemas de la secuencia. Tras la aplicación de la sistemática en el taller piloto 2, los árboles del problema fueron revisados y modificados.

En el capítulo donde se explica la metodología, hemos presentado el Árbol del problema 2 (figura 9) para ejemplificar la creación del instrumento. Para no repetir este mismo contenido aquí presentamos únicamente los árboles de los problemas 1 y 3.

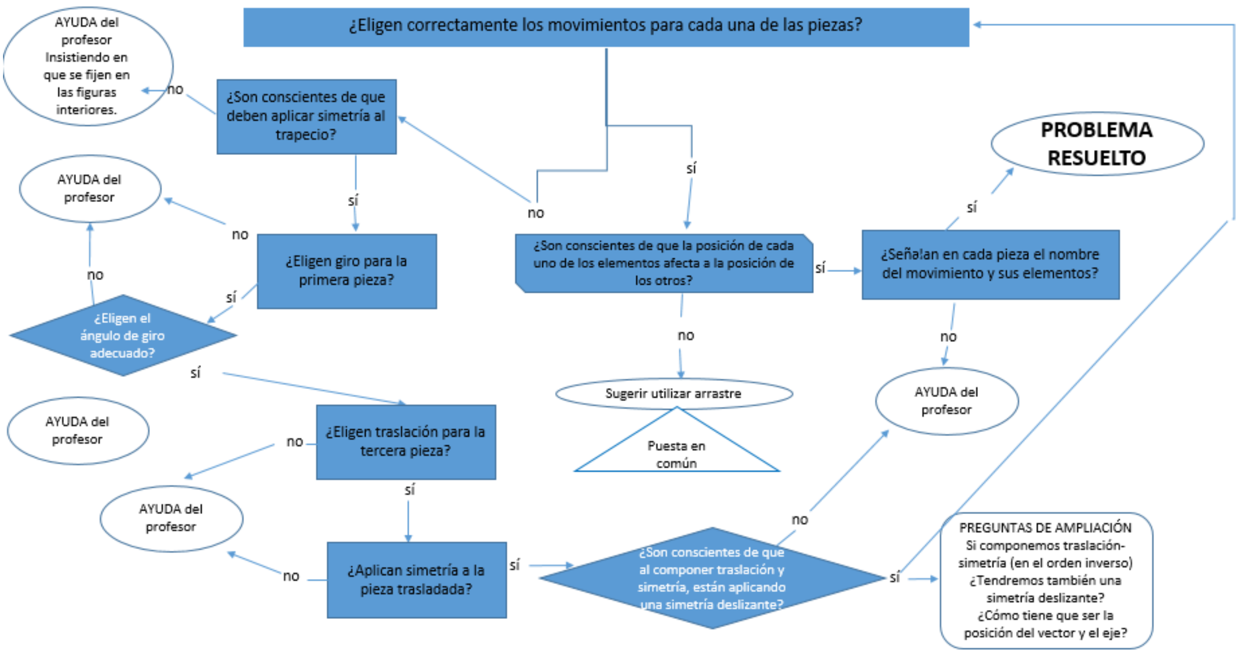


Figura 41 Árbol del problema 1

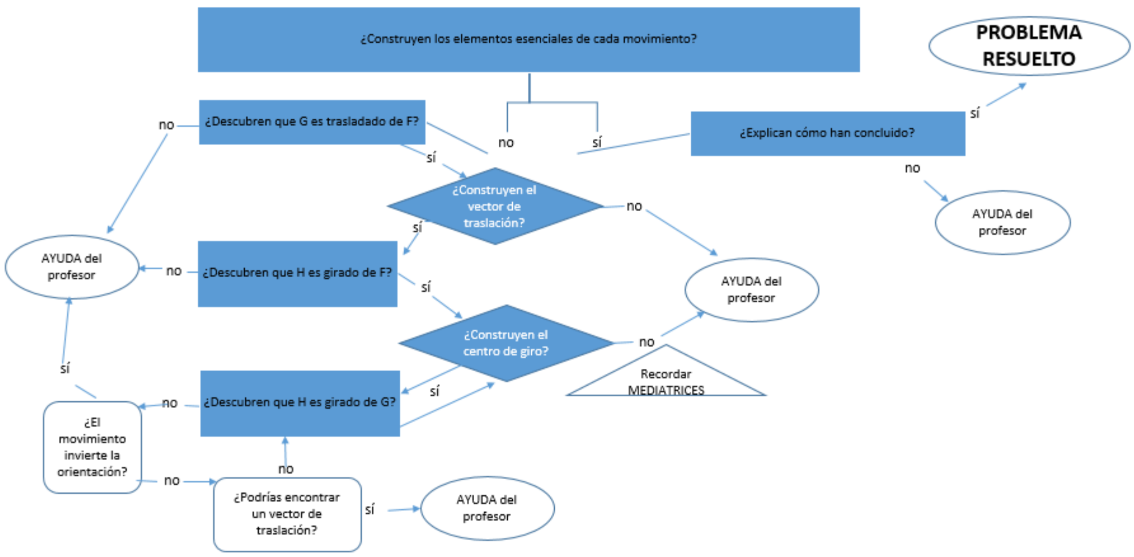


Figura 42 Árbol del problema 3

La figura 41 corresponde al árbol del problema asociado al problema 1. En los talleres piloto se ha observado que generalmente los alumnos comienzan aplicando simetría al trapecio. Sin embargo, veremos que las alumnas que presentan su solución en gran grupo, empiezan aplicando el giro. Esto obligará a una nueva adaptación del instrumento para guiar esa discusión. Por otro lado, los futuros maestros deben ser conscientes de que la posición de uno de los elementos condiciona la selección de los elementos que se utilizarán para mover el resto. Además, identificar con su nombre cada uno de los movimientos y sus elementos es una parte fundamental de la tarea. Hay también varias preguntas de ampliación.

En el problema 3, los alumnos deben buscar estrategias para la identificación de algunas isometrías y la construcción de los elementos esenciales: traslación y giro (centro de giro perteneciente a la figura y exterior a la figura). Se pide la escritura del razonamiento utilizado para que los alumnos interioricen los conceptos y hacer consciente a la profesora del proceso mental que han seguido.

5.1.2. Configuración didáctica

Se elaboró una misma configuración didáctica para cada uno de los cuatro problemas, ya que formaban parte de una secuencia corta que se quería trabajar de un modo concreto para poder analizarlos, posteriormente, de manera análoga.

En esta investigación, es fundamental el uso de la tecnología, en particular GeoGebra para la realización de los tres primeros problemas por su riqueza en la exploración. Por esta razón, hemos seleccionado como configuración didáctica el uso de un ordenador por pareja en el aula de informática y, para todo el grupo, el proyector de esta aula. En la clase ordinaria, donde se llevan a cabo las discusiones en gran grupo se dispone de pizarra digital, PDI (que actuará como proyector) y ordenador portátil en la mesa de la profesora.

Todos los ordenadores están provistos de conexión a Internet y contienen el programa específico GeoGebra. Algunas parejas deciden utilizar un ordenador portátil personal en lugar del ordenador del aula. La pizarra velleda está presente en ambas clases. En el aula ordinaria también se dispone de pizarra clásica de tiza.

Las actividades se suben al Campus Virtual justo antes de comenzar la sesión y los alumnos deben presentarlas a través de esta herramienta antes de finalizar cada sesión doble. El problema 4 es el único que no requiere entregar un documento .ggb. En este caso, suben al Campus Virtual un documento .doc y entregan en mano el árbol del problema que han diseñado en parejas.

La conexión a internet en muchas ocasiones es lenta en el aula de informática y el Campus Virtual deja de funcionar en algunos momentos.

5.1.3. Modo de explotación

Durante las sesiones en el aula de informática, en primer lugar proponemos que se trabaje brevemente de manera individual. El objetivo de este primer contacto es que cada uno se sitúe en el contexto del problema. A continuación, los alumnos trabajan por parejas compartiendo un ordenador. Así, experimentan, conjeturan y hacen una propuesta de solución utilizando el SGD. En la siguiente sesión doble tiene lugar una discusión en gran grupo utilizando la pizarra digital como proyector para poner en común el trabajo realizado por parejas y conectar con otros contenidos geométricos.

En los cuatro problemas se exponen una o varias soluciones, para ello sale una pareja o un alumno, siendo una orquestación del tipo *Trabajo del Sherpa* (Drijvers et al., 2010). Los alumnos utilizan la tecnología para explicar cómo han resuelto el problema y la profesora formula preguntas tanto a los “sherpas” como al resto del grupo para que formalicen conceptos, casuísticas y casos particulares.

La profesora utiliza el guion del árbol del problema para pensar la secuenciación teórica sobre cómo gestionar la discusión en gran grupo. Luego, aquí tenemos otro ejemplo de la utilidad y la potencia del instrumento que se había diseñado para la anticipación. Sin embargo, matiza ese guion basándose en los procesos, las dificultades y los errores encontrados en los documentos entregados después de las sesiones en el aula de informática. Utiliza esta información para elegir a los “sherpas” y guiar la orquestación hacia ciertos contenidos.

5.1.4. Monitorización

Si analizamos los vídeos de los trabajos por parejas en los que la profesora ha realizado la monitorización, vemos cómo se ha seguido el guion del árbol del problema. Tenía que monitorizar a la vez a diez parejas y a una persona que trabajaba individualmente. Sin embargo, no destinaba mucho tiempo a interpretar en qué punto del problema se encontraban, pudiendo dedicarlo a elegir qué tipo de mensajes dar en cada momento.

5.1.5. Selección

La profesora es quien selecciona qué pareja o alumno expone su solución durante la discusión en gran grupo en el aula ordinaria. En todos los casos, se basa en la observación llevada a cabo durante la monitorización y el análisis de las soluciones presentadas a través del Campus Virtual. La fase de selección ha sido distinta para cada uno de los problemas, dependiendo de sus características.

En el caso del problema 1, elige a Cristina y Radhika que habían presentado dos soluciones, descartando la primera. El motivo principal por el que esta pareja es la seleccionada es que, en su solución definitiva, han representado dos vectores equipolentes sin ser conscientes de ello. Así, el objetivo de una parte de la discusión en gran grupo es el descubrimiento de las características que definen a un vector y concluyen que ambos son el mismo vector (utilizan este lenguaje, en lugar de vectores equipolentes porque la profesora prefiere no ser demasiado formalista con el lenguaje matemático). Además, esta pareja ha aplicado un giro de 90º en sentido antihorario al igual que la mayoría de sus compañeros, mientras que unos pocos lo han hecho de 270º en sentido horario. Construyen simetría deslizante como composición de simetría y después traslación, aunque otras parejas han aplicado en primer lugar traslación y después simetría.

Para el problema 2 la profesora seleccionó a dos parejas. La primera pareja, formada por María y Silvia, construye el eje de simetría utilizando el carácter dinámico del SGD, mientras que la segunda, formada por Elena y Tamara, lo construyen como mediatriz entre puntos homólogos. En el caso del centro de giro, la primera pareja vuelve a utilizar el carácter dinámico. La segunda pareja no ha utilizado un procedimiento que sirva en general para encontrar el centro de giro, sin embargo, basándose en su solución y las preguntas formuladas por la profesora, el gran grupo llega a deducir que el centro de giro está en la intersección de las mediatrices entre puntos homólogos. El motivo por el cual elige a estas parejas es ejemplificar dos procedimientos totalmente distintos para encontrar la solución. El objetivo es que el grupo concluya cuál es el procedimiento válido en cualquier contexto (dinámico o no), pero a la vez valoren el dinamismo del SGD.

En el problema 3 también eligió a dos parejas. La primera pareja había utilizado “polígonos auxiliares” en los que poder aplicar el carácter dinámico del SGD. Esto permite que el grupo vuelva a reflexionar sobre la importancia del dinamismo en el descubrimiento de propiedades geométricas. La segunda pareja había utilizado el mínimo número de puntos posibles para resolver el problema, no habiendo realizado comprobación alguna de su solución. Se busca que los alumnos descubran la importancia de comprobar una solución.

Para el último problema, que es de corte didáctico, en primer lugar sale María que es la persona que no había trabajado en parejas y en segundo lugar Fernando, cuya pareja era Carlos. El árbol del problema de María no representa un proceso lógico para la resolución, precisamente por ello la profesora escoge a esta persona. El objetivo es enfatizar en gran grupo la importancia de que las ramas del árbol lleven a resolver el problema. En contraste, el caso del árbol de Fernando y Carlos sí representa un proceso lógico y, además, han diseñado un problema con varios apartados.

5.1.6. Implementación didáctica

La implementación didáctica no es una fase caracterizada por la improvisación, sino que es el resultado de una preparación. Durante la primera sesión doble que tiene lugar en el aula de informática, los alumnos utilizan un ordenador por pareja para realizar los problemas 1 y 2. Al finalizar la sesión, suben los resultados al Campus virtual. La discusión en gran grupo sobre esos dos problemas tiene lugar en la siguiente sesión doble, en el aula ordinaria de clase. La tercera sesión doble se dedica a la elaboración de los problemas 3 y 4 en el aula de informática, mientras que la última es la puesta en común y discusión en gran grupo sobre esos problemas.

Para el correcto desarrollo de la discusión en gran grupo, la profesora revisa previamente las soluciones de los alumnos a cada uno de los problemas. Se ha visto necesario modificar el guion marcado por los árboles del problema en base a estas soluciones.

5.1.7. Secuenciación

Se ha utilizado los estadios de discusión de un problema para la planificación de la secuenciación. No obstante, en el análisis a posteriori se observa que en este caso no han quedado organizados en orden. Esto demuestra flexibilidad por parte de la profesora.

La discusión en gran grupo queda bastante organizada en relación al esquema inicial dado por el árbol del problema, aunque el guion haya sufrido modificaciones en base a las soluciones de los alumnos. Se observa que son necesarias un gran número de recapitulaciones para conseguir que los futuros maestros sigan el hilo de la discusión.

5.1.8. Conexiones

En el problema 1 se exige al alumno hacer explícitas una serie de propiedades geométricas para construir una figura. En la discusión en gran grupo, la profesora conecta con la importancia de indicar el sentido cuando se habla de amplitud de ángulo de giro. Revisan la noción de simetría, recordando que su elemento fundamental es el eje de simetría e invierte la orientación. También repasan la noción de simetría deslizante, como composición de simetría y traslación (en un orden u otro). En el caso particular en el que el vector de traslación es perpendicular al eje de simetría, la composición de simetría y traslación genera una nueva simetría. Además, recuerdan la importancia de utilizar un lenguaje matemático adecuado, diferenciando entre recta y segmento. Utilizando el carácter dinámico del SGD recuerdan las características de un vector: módulo, dirección y sentido.

Durante la discusión en gran grupo del segundo problema, vuelven a recordar que la simetría invierte la orientación y los puntos fijos forman una recta que es el eje de simetría. En un giro se mantiene la orientación y únicamente hay un punto fijo, que es el centro de giro. Traslación mantiene la orientación y no deja ningún punto fijo. El eje de simetría es la mediatriz entre puntos homólogos (todas las mediatrices coincidirán en una única recta). El centro de giro está en la intersección de mediatrices entre puntos homólogos. El vector de traslación es una flecha que tiene como origen un punto de la figura inicial y termina en su homólogo (aunque se puede colocar en cualquier lugar).

En el problema 3, la discusión va más allá de los objetivos planteados y de lo que pide el propio enunciado conectando con “ángulo de giro”. También se conecta con composición de movimientos. La composición de un giro y una traslación origina un giro. Los únicos cuatro movimientos posibles en el plano son: traslación, giro, simetría o simetría deslizante. La composición de dos cualquiera de ellos genera uno de los cuatro.

En la discusión de cada uno de los tres primeros problemas, al comenzar se recuerda el árbol del problema que ya se había presentado en el aula de informática. En el problema 4 se pide diseñar este instrumento y evaluar su validez mediante una rúbrica. Además, los alumnos deben trabajar con un extracto del currículo de Educación Primaria de la Comunidad de Madrid (Decreto 89/2014 de 24 de julio, 25 de julio, 2014). Al finalizar, se pide una reflexión personal sobre los distintos aspectos trabajados en el desarrollo del taller.

5.2. Aplicación del instrumento de análisis TRU-Math a la implementación de la secuencia

Una vez analizados los tres problemas y su implementación explicando lo transcurrido en cada sistemática, aplicamos el instrumento de análisis de clases de Schoenfeld (2013) que se ha explicado en el epígrafe 3.6.1. El objetivo es comprobar si la secuencia general ha representado una práctica matemáticamente robusta para los estudiantes.

Aplicamos el instrumento a cada parte de la estructura de la clase según Schoenfeld (2013), justificando nuestra interpretación. Finalmente, se concluye con una mirada conjunta de todas las rúbricas.

Comenzamos con un análisis de los planteamientos de los problemas de la secuencia. Todos los problemas son presentados de la misma forma, así nos podemos referir conjuntamente a todas las situaciones de análisis que ocurren durante la secuencia didáctica. Sin embargo, por las características propias del problema 4, para completar la última columna de todos los planteamientos nos fijaremos especialmente en éste. En las siguientes tablas examinamos la exposición de la profesora, el trabajo en grupos reducidos, las presentaciones de los estudiantes y la presentación de ideas confusas o erróneas.

En el siguiente capítulo, analizamos en profundidad las discusiones en gran grupo y las oportunidades de aprendizaje que generan. Este análisis es fundamental en referencia al segundo objetivo del trabajo de tesis. Comprobaremos si se han generado situaciones potencialmente ricas que crean oportunidades de aprendizaje para los estudiantes y analizaremos el aprovechamiento de algunas de éstas.

Tabla 17 Aplicación del instrumento TRU-Math al planteamiento

	Matemáticas	Demanda cognitiva	Acceso	Organismo: autoridad y responsabilidad	Uso de la evaluación	Aprendizaje didáctico
Planteamiento	3. Se pone más atención en los conceptos y conexiones, con la oportunidad de desarrollar prácticas matemáticas	3. Las pistas o el andamiaje del profesor promueven una lucha productiva por parte de los estudiantes para construir el aprendizaje y participar en prácticas matemáticas.	3. Hay claros esfuerzos para invitar y ayudar a participar a todos los estudiantes	2. Los estudiantes tienen un tiempo para explicar, pero en general tienen un rol reactivo. La profesora sigue siendo la autoridad.	2. Se obtienen los razonamientos de los estudiantes o se hace referencia a ellos y se corrigen cuando cometen errores.	3. Se pone atención en lo relativo al aprendizaje didáctico del tema matemático que se trata
Justificación	Los problemas están diseñados para que se practique matemáticas de forma activa, utilizando la tecnología y trabajando en parejas. En la exposición de la tarea a realizar, la profesora siempre comenta el enunciado del problema y dice los objetivos. Así conecta con los conceptos y brinda la oportunidad de desarrollar prácticas matemáticas.	Los problemas están planteados de forma abierta y para trabajar en parejas con SGD. Así, promueven la participación práctica del estudiante para construir su propio aprendizaje.	En todas las ocasiones, la profesora anima a los estudiantes a que en primer lugar piensen individualmente una manera de resolución. Después, trabajan en parejas mientras la profesora realiza una monitorización.	Los problemas no están planteados prestando especial atención a que los alumnos generen autoridad y responsabilidad. La máxima autoridad es la profesora que es quien plantea los problemas y el trabajo en clase.	El planteamiento de los problemas incluye especial atención a los razonamientos de los estudiantes, ya que se pide explícitamente que escriban su razonamiento en cuadros de texto en los tres primeros problemas. En el caso del problema 4, deben realizar una reflexión sobre su actividad utilizando unas rúbricas.	El problema 4 pone atención específica al aprendizaje didáctico.

Tabla 18 Aplicación del instrumento TRU-Math a la exposición de la profesora

	Matemáticas	Demanda cognitiva	Acceso	Organismo: autoridad y responsabilidad	Uso de la evaluación	Aprendizaje didáctico
Exposición de la profesora	3. Se pone más atención en los conceptos y conexiones, con la oportunidad de desarrollar prácticas matemáticas	3. Las pistas o el andamiaje del profesor promueven una lucha productiva por parte de los estudiantes para construir el aprendizaje y participar en prácticas matemáticas	3. Hay claros esfuerzos para invitar y ayudar a participar a todos los estudiantes	2. Los estudiantes tienen un tiempo para explicar, pero en general tienen un rol reactivo. La profesora sigue siendo la autoridad.	3. Se tienen en cuenta los razonamientos de los estudiantes y se discuten, a veces afectando a la estructura de la clase preparada de antemano	3. Se pone atención en lo relativo al aprendizaje didáctico del tema matemático que se trata.
Justificación	Las exposiciones de la profesora no son la parte central, ya que la secuencia está diseñada para trabajarse en parejas y en gran grupo. Sin embargo, son necesarias para establecer conexiones.	El discurso de la profesora no es únicamente expositivo, ya que continuamente plantea preguntas y retos.	En numerosas ocasiones, la profesora plantea preguntas a los alumnos. Así, invita a la participación durante sus intervenciones.	Aunque la profesora invita a la participación en muchas ocasiones durante sus exposiciones, en general los alumnos están callados. Esto se debe a que tienen interiorizadas unas normas de participación muy estrictas. Cuando la profesora habla, no están acostumbrados a participar de modo espontáneo.	La profesora hace uso de los razonamientos de los estudiantes e intenta conectar con aspectos que se han trabajado previamente o se van a trabajar en las siguientes sesiones.	En muchas ocasiones durante su discurso, la profesora hace referencia a herramientas didácticas. Sobre todo, de anticipación, recalcando en numerosas ocasiones que en todo momento se están guiando por los árboles del problema. La atención al aprendizaje didáctico está presente en las exposiciones de la profesora durante toda la secuencia. No únicamente en el problema 4.

Tabla 19 Aplicación del instrumento TRU-Math a trabajos en grupos reducidos

	Matemáticas	Demanda cognitiva	Acceso	Organismo: autoridad y responsabilidad	Uso de la evaluación	Aprendizaje didáctico
Trabajos en grupos reducidos	3.Se pone más atención en los conceptos y conexiones, con la oportunidad de desarrollar prácticas matemáticas	3 Las pistas o el andamiaje del profesor promueven una lucha productiva por parte de los estudiantes para construir el aprendizaje y participar en prácticas matemáticas	2. Se ven algunos esfuerzos para invitar a otros estudiantes a participar	3.Se anima a los alumnos a explicar y responder a las ideas matemáticas. Se puede oír la voz de los estudiantes	2. Se obtienen los razonamientos de los estudiantes o se hace referencia a ellos y se corrigen cuando cometen errores	3. Se pone atención en lo relativo al aprendizaje didáctico del tema matemático que se trata.
Justificación	Las características de los problemas de la secuencia permiten que los alumnos realicen prácticas matemáticas durante el trabajo en parejas.	Durante la monitorización del trabajo en parejas, la profesora da mucha importancia al andamiaje con preguntas que va proponiendo para profundizar en conceptos. Así, empieza a guiar a los alumnos hacia los contenidos que se quieren abordar en la discusión en gran grupo.	Se observa que no siempre ocurre que los dos miembros de la pareja trabajen por igual. Se podrían haber hecho más esfuerzos para asegurar la participación de todos de forma activa.	Durante el trabajo por parejas, los alumnos son protagonistas de su propio aprendizaje ya tienen total libertad para comunicarse.	Cada pareja sube al Campus Virtual su trabajo. Este trabajo es evaluado por la profesora que corrige los errores y pone una nota numérica. Sin embargo, durante el trabajo por parejas, solo son corregidos si piden ayuda.	En el trabajo por parejas del problema 4, los alumnos tienen la oportunidad de dialogar sobre temas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Tabla 20 Aplicación del instrumento TRU-Math a las presentaciones de los estudiantes

	Matemáticas	**Demanda cognitiva**	**Acceso**	**Organismo: autoridad y responsabilidad**	**Uso de la evaluación**	**Aprendizaje didáctico**
Presentaciones de los estudiantes	3.Se pone más atención en los conceptos y conexiones, con la oportunidad de desarrollar prácticas matemáticas.	3. Las pistas o el andamiaje del profesor promueven una lucha productiva por parte de los estudiantes para construir el aprendizaje y participar en prácticas matemáticas	2. Se ven algunos esfuerzos para invitar a otros estudiantes a participar	2. Los estudiantes tienen un tiempo para explicar, pero en general tienen un rol reactivo. E profesor sigue siendo la autoridad	3. Se tienen en cuenta los razonamientos de los estudiantes y se discuten, a veces afectando a la estructura de la clase preparada de antemano	3. Se pone atención en lo relativo al aprendizaje didáctico del tema matemático que se trata.
Justificación	Durante el desarrollo de las presentaciones de los estudiantes, se exponen conceptos y prácticas matemáticas. En algunas ocasiones necesitan ser guiados por la profesora.	El aprendizaje y las prácticas matemáticas se construyen con el andamiaje de las presentaciones realizadas con los alumnos. La profesora plantea cuestiones, pero siempre a partir de lo que los alumnos exponen.	Por el número de alumnos de la clase, no ha sido posible que todas las parejas presenten algún trabajo. Sin embargo, durante en otros momentos durante el desarrollo de la unidad didáctica sí se ha conseguido que todos expongan. Aun así, la profesora podría esforzarse más por hacer intervenir a los estudiantes desde el sitio.	Los alumnos tienen la oportunidad de exponer sus ideas, pero la profesora sigue siendo la autoridad. Los alumnos están muy acostumbrados a trabajar de esta manera.	Las explicaciones de los alumnos son el centro de las discusiones en gran grupo. En diversas ocasiones, provocan un cambio de la estructura de la discusión tal y como estaba preparada.	Ocurre durante las presentaciones del problema 4. Estas presentaciones son las únicas realizadas por un único alumno en lugar de una pareja. Una de ellas es realizada por la persona que trabajaba sola y otra por un alumno cuya pareja no asistió ese día a clase.

Tabla 21 Aplicación del instrumento TRU-Math a la presentación de ideas confusas o erróneas

	Matemáticas	Demanda cognitiva	Acceso	Organismo: autoridad y responsabilidad	Uso de la evaluación	Aprendizaje didáctico
Presentación de ideas confusas o erróneas	3.Se pone más atención en los conceptos y conexiones, con la oportunidad de desarrollar prácticas	3.Las pistas o el andamiaje del profesor promueven una lucha productiva por parte de los estudiantes para construir el aprendizaje y participar en prácticas matemáticas.	3. Hay claros esfuerzos para invitar y ayudar a participar a todos los estudiantes.	3.Se tienen en cuenta los razonamientos de los estudiantes y se discuten, a veces afectando a la estructura de la clase preparada de antemano.	3. Se tienen en cuenta los razonamientos de los estudiantes y se discuten, a veces afectando a la estructura de la clase preparada de antemano	3. Se pone atención en lo relativo al aprendizaje didáctico del tema matemático que se trata
Justificación	En varias ocasiones, en distintos momentos de la sistemática, se utilizan las ideas confusas o erróneas para aprender sobre conceptos o sobre la práctica matemática.	La presentación de ideas confusas o erróneas siempre se plantean en forma de demanda cognitiva pues los alumnos tienen que esforzarse para construir conceptos o procedimientos de forma adecuada.	Continuamente, la profesora hace claros esfuerzos por invitar a los estudiantes a plantear dudas. Todas las ideas son respetadas y verificadas o modificadas en las discusiones en gran grupo.	La profesora intenta que los alumnos ayuden a corregir y explicar las ideas confusas o erróneas. Promueve que se escuche su voz.	Las ideas erróneas no se tienen en cuenta para la evaluación. La estructura de la clase se ve modificada en función de las dificultades de los alumnos.	La profesora decide que se presente una solución del problema 4 que incluye confusiones e ideas erróneas.

A continuación, presentamos el análisis global de la implementación de la secuencia didáctica.

Tabla 22 Análisis global de la implementación de la secuencia didáctica

	Matemáticas	Demanda cognitiva	Acceso	Organismo: autoridad y responsabilidad	Uso de la evaluación	Aprendizaje didáctico
Planteamiento	3	3	3	2	2	3
Exposición del profesor	3	3	3	2	3	3
Trabajo en grupos reducidos	3	3	2	3	2	3
Presentaciones de los estudiantes	3	3	2	2	3	3
Presentación de confusiones o ideas erróneas.	3	3	3	3	3	3

Podemos decir que la implementación de la secuencia ha sido satisfactoria, aunque mejorable en algunos aspectos. Los aspectos más potentes son *matemáticas* y *aprendizaje didáctico*, aunque hay que tener en cuenta que para completar esta última columna nos hemos fijado básicamente en el problema 4. El punto más débil es *Organismo: autoridad y responsabilidad*. Esto es debido a que los alumnos están muy acostumbrados a una disciplina estricta donde la profesora es la máxima autoridad. Para posteriores implementaciones de la secuencia debe tenerse en cuenta este hecho. Además, aunque hay claros esfuerzos por parte de la profesora por promover la participación de todos los estudiantes, la columna de *acceso* sigue mostrando cierta debilidad. No todos los alumnos participan por igual, esto se debe en parte a las características del grupo, pero consideramos que la profesora podría hacer más esfuerzos por promover la participación.

Tras haber analizado la secuencia de un modo general para garantizar que la práctica era eficiente. A continuación, centramos el análisis en la discusión en gran grupo

Capítulo 6. Análisis de las oportunidades de aprendizaje

Centrándonos en el segundo objetivo de este trabajo de tesis, debemos comprobar que la discusión en gran grupo ha generado oportunidades de aprendizaje matemático. También se necesita analizar la documentación de evidencias de aprovechamiento de algunas de las oportunidades de aprendizaje. Para ello estructuramos este capítulo en dos apartados: Aplicación del instrumento de análisis “Detector de oportunidades de aprendizaje” a las discusiones en gran grupo y análisis del progreso matemático en las discusiones en gran grupo.

6.1. Aplicación del instrumento de análisis “Detector de oportunidades de aprendizaje” a las discusiones en gran grupo.

En este apartado exponemos de forma detallada el análisis de los datos utilizando el instrumento “Detector de oportunidades de aprendizaje” diseñado y validado por Morera, Planas y Fortuny (2013) y presentado previamente en el apartado 3.6.2.

A continuación, presentamos con detalle el análisis de la puesta en común del problema 2. Luego se muestran los análisis integrados de todos los problemas.

El estudio de la puesta en común del resto de problemas se ha realizado de manera análoga al problema 2 y se puede leer en el Anexo II.

6.1.1. Puesta en común del problema 2

Recordamos el enunciado del problema:

PROBLEMA 2:

A continuación, se muestra un plano con cuatro pupitres colocados para trabajar de manera colaborativa en parejas. Dado el pupitre de color negro, hemos aplicado diferentes movimientos, obteniendo el resto.

a) *Pintad de color azul la figura que sea una simetría axial del pupitre negro; de verde la que sea un giro; de rojo la que sea una traslación.*

b) *Escribid los argumentos en los cuales os habéis basado para la elección de los colores, en un cuadro de texto.*

c) *Para el que sea simetría, construid el eje de simetría que transforma el pupitre negro en el azul.*

d) *Para el que sea giro, representad el centro de giro mediante un punto.*

e) *Para el que sea traslación, construid el vector de traslación.*

f) *Escribid detalladamente los pasos para las construcciones, en otro cuadro de texto.*

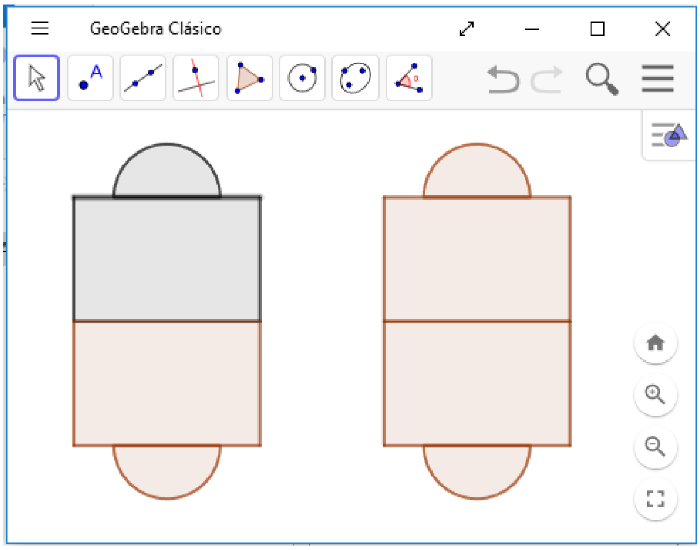


Figura 43 Problema 1

Este problema tiene tres partes bien diferenciadas: la identificación de los movimientos rígidos en el plano en un entorno dinámico, la justificación de las identificaciones realizadas de forma visual y la construcción de los elementos esenciales.

Episodio 1 (e_1): Recordatorio del enunciado.

Tabla 23 Transcripción e interpretación del episodio 1

Participante	Intervención	Interpretación
Profesora	*En este ejercicio lo que se pedía era identificar con unos determinados colores cada uno de los movimientos. Luego pedía explicar cómo lo había hecho y luego construir los elementos de cada uno de los movimientos.* *Recuerdo cuáles eran los objetivos que ya los escribí en la pizarra:* *Trabajar la identificación visual de las isometrías. Es decir, viendo el movimiento ya hecho, identificar qué movimiento es. Otro objetivo era, la identificación y la construcción de los elementos esenciales de las transformaciones. Y el tercero, precisión en la justificación de lo que hemos realizado de forma visual* *Entonces, en esto tenemos tres cosas: primero identificarlos, después saber construir los elementos y luego saber justificarlo y hacerlo con precisión.*	Recapitulación

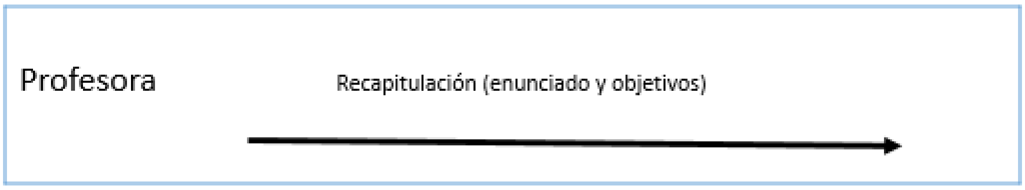


Figura 44 Esquema visual del episodio 1

Oportunidades de aprendizaje.

Desde un punto de vista interpretativo y tras examinar el esquema del episodio, no observamos ninguna oportunidad de aprendizaje, ya que simplemente está situando a los alumnos para iniciar la puesta en común.

Episodio 2 (e_2): Identificación de una simetría.

Tabla 24 Transcripción e interpretación del episodio 2

Participante	Intervención	Interpretación
María	*A ver, pues para hacer la simetría lo primero que hicimos fue poner dos puntos O y P…*	
Profesora	*A ver, primero ¿cómo identificasteis los colores? ¿Cómo sabíais que era el azul*?	
María	*Haciendo la recta.*	
Profesora	*Vale. Lo estáis diciendo bien lo que pasa es que como el orden de las preguntas iba primero identificación, luego construye los elementos… Pero vosotras para identificarlo buscasteis el elemento.*	Petición de argumentación
María y Silvia	*Sí*	
Profesora	*Pero intuitivamente en algún momento tuvisteis que pensar que era simetría para buscar el eje.*	
Silvia	*Porque es el que está abajo y “hace así” (gesto con las manos).*	Justificación empírica
Profesora	*A ver, alguien de los que estáis sentados puede explicar con palabras más técnicas qué es eso de que “hace así”.*	Corrección de vocabulario matemático. Invitación a la participación.
María Q (desde el sitio)	*Pues que es simétrico*	Uso de vocabulario específico

Profesora	*¿Y este no está así? Este rojo…*	Búsqueda de alternativas.
Cristina (desde el sitio)	*Pero es que si mueves…*	Demostración técnica.
María Q (desde el sitio)	*Pero es que ese también puede ser traslación. Entonces por eliminación…*	Complemento de la explicación.
Profesora	*Vale, como cada uno tenía que ser una cosa pues por eliminación, este era simétrico. Y, como dice Cristina, si mueves el gris con el otro nunca encuentra un punto fijo. ¿Por qué nos cuesta moverlo? Porque estamos acostumbrados a trabajar siempre con geometría estática.*	Validación. Recapitulación.

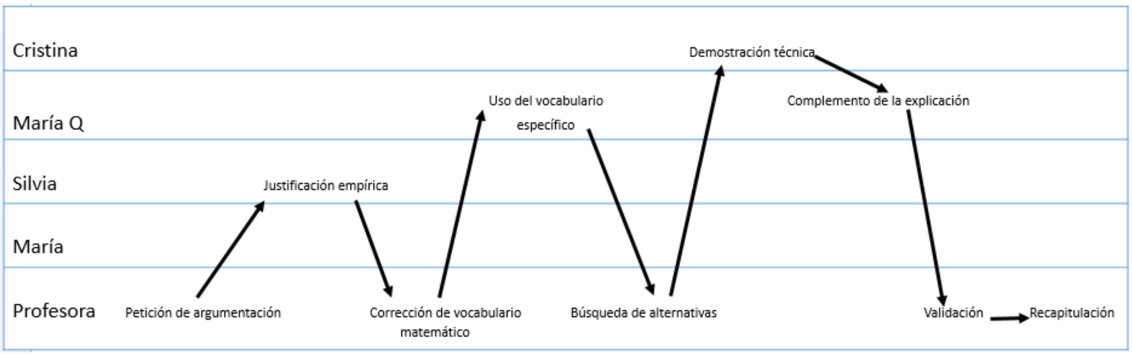


Figura 45 Esquema visual del episodio 2

Oportunidades de aprendizaje

Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos.

- *Revisar la noción de simetría:* Una de las alumnas que expone la solución recuerda que el elemento fundamental de la simetría es una recta. Además, las imágenes quedan “enfrentadas”. La orientación se invierte y lo evidencian con los gestos de las manos.

Oportunidades orientadas a diferentes estrategias.

- *Aprender a conjeturar:* Se resalta la importancia de pensar de qué movimiento se trata, antes de construir los elementos. Investigar previamente y pensar cómo se ha movido el objeto para dar lugar al homólogo. A priori, utilizan el "descarte" para identificar traslación y simetría.
- *Aprender a argumentar empíricamente, utilizando el arrastre:* La respuesta de Cristina, haciendo referencia al arrastre recuerda el carácter dinámico del programa. El arrastre es una justificación empírica.

Oportunidades orientadas a autorregulación

- *Aprender la necesidad de expresarse con el lenguaje matemático adecuado*: Al solicitar que los alumnos expresen con palabras el gesto que ha hecho con las manos una compañera, se genera la oportunidad de aprender la importancia del uso del vocabulario adecuado cuando se dispone de él.

Episodio 3 (e_3): Construcción de un eje de simetría, utilizando tanteo y el carácter dinámico del software.

Las alumnas encuentran una solución sin utilizar un procedimiento matemático para encontrar el eje de simetría. Simplemente, utilizan el carácter dinámico del Software para aproximar una solución. No es la solución que la profesora esperaba al plantear la actividad, aunque es una solución correcta. En próximos episodios vemos la importancia de utilizar un procedimiento matemático adecuado.

Tabla 25 Transcripción e interpretación del episodio 3

Participante	Intervención	Interpretación
Profesora	*Entonces, ¿cómo habéis dibujado la recta? Ahora sí*	Petición de solución.

María	*Creo que la pusimos en cualquier lugar y al moverlo se movía igual*	Exposición sin argumentación
Profesora	*Moved, utilizando el portátil.*	Petición de justificación empírica
María	(Arrastra la recta que han representado en GeoGebra) *Al mover la recta se movía con la misma distancia.*	Justificación empírica
Profesora	*Conseguisteis encontrar un elemento que hacía coincidir una figura con la otra.* *Habéis hecho una simetría respecto de esta recta que habéis dibujado y al hacer el simétrico de este* (el rectángulo) *respecto de la recta, quedaba aquí. Con el botón "simetría".* *Y si lo hubiéramos hecho simetría de esta semicircunferencia, hubiera quedado aquí.*	Recapitulación

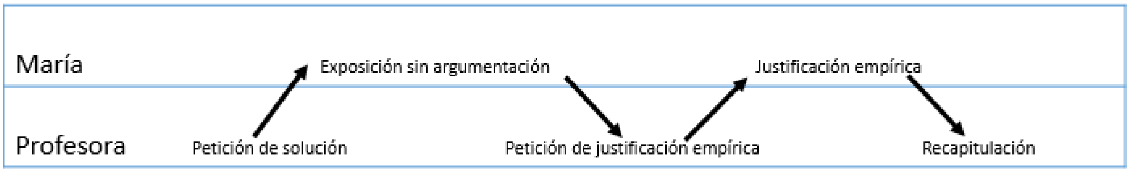


Figura 46 Esquema visual del episodio 3

Oportunidades de aprendizaje

Oportunidades orientadas a diferentes estrategias.

- *Aprender a argumentar empíricamente, utilizando el arrastre:* Ya que es una solución dada por "tanteo", las alumnas están utilizando el carácter dinámico del programa, en particular con el botón "arrastre" para ubicar el eje de simetría.

Episodio 4 (e_4): Construcción de centro de giro utilizando tanteo y el carácter dinámico del software. Búsqueda de ángulo de giro.

En este caso, lo que explican las alumnas es que han representado un punto cualquiera y han aplicado al rectángulo un giro de 180º. Luego han arrastrado ese punto cualquiera por la pantalla para localizar cuál es el centro de giro. Al igual que en el episodio anterior, no utilizan un procedimiento matemático exacto para encontrar el centro de giro.

Tabla 26 Transcripción e interpretación del episodio 4

Participante	Intervención	Interpretación
Profesora	*Vale, ¿y los demás movimientos?*	Petición de solución
María	*Vale, eeh.. el giro. Lo hicimos al ir a poner un punto y…*	Exposición sin argumentación.
Profesora	*Bien, el elemento del giro era un punto.*	
Silvia	*Al darle ahí.*	
María	*Aparecía aquí.*	
Profesora	*A ver, movedlo.*	Petición de justificación empírica.
María y Silvia	*(Lo mueven, utilizando el arrastre)*	Justificación empírica.
Profesora	*¿Y es casualidad que el centro de giro esté ahí, en el eje de simetría?* *Vamos a ver, son movimientos independientes.*	Conexión.
María Q (desde el sitio)	*Es que está ahí.*	Exposición sin argumentación.
Profesora	*En este caso concreto, todo pasa por el centro porque están todas las figuras orientadas unas a otras, pero son movimientos independientes.* *¿Y cuál es el ángulo de giro?*	Recapitulación Petición de solución

María	*(Lo mira y hace un gesto con el brazo, luego responde) 180.*	Presentación de solución argumentada

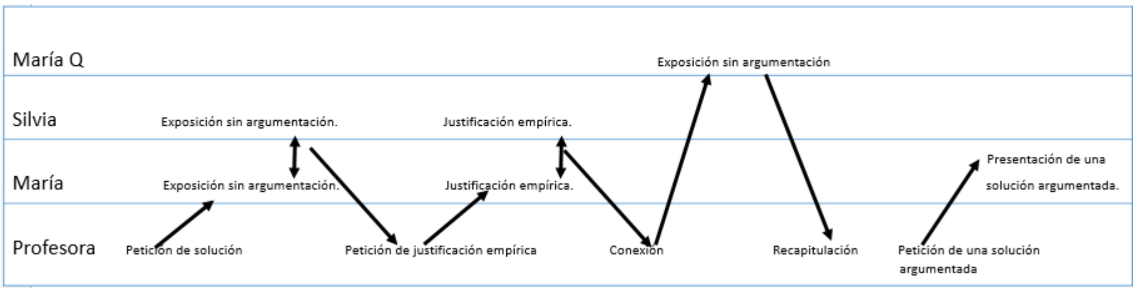


Figura 47 Esquema visual del episodio 4

Oportunidades de aprendizaje

Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos.

Revisar la noción de giro: La alumna que expone la solución habla de punto. La profesora recuerda los elementos que definen un giro: punto (que es el centro de giro) y ángulo.

Oportunidades orientadas a diferentes estrategias.

Aprender a argumentar empíricamente, utilizando el arrastre: Ya que es una solución dada por "tanteo", las alumnas están utilizando el carácter dinámico del programa, en particular con el botón "arrastre" para ubicar el centro de giro.

Oportunidades orientadas a autorregulación.

- *Aprender la importancia de preguntarnos conexiones con otras situaciones*. El hecho de que la profesora plantee si es casualidad que el centro de este movimiento se encuentre en el eje de simetría ayuda a que los alumnos piensen si son movimientos independientes. Aunque la representación se haga en el mismo plano, si hay relación entre un movimiento y otro puede no resultar evidente.

Episodio 5 (e_5): Traslación.

Tabla 27 Transcripción e interpretación del episodio 5

Participante	**Intervención**	**Interpretación**
Profesora	*¿Y qué más falta? La traslación*	Petición de solución
María	*La traslación. Para ello hicimos un vector. Pusimos los puntos M y N que iban desde el final de este al principio del siguiente y al moverlo…* (utiliza “elige y mueve” para intentar arrastrar el vector pero no puede).	Presentación de una solución
Profesora	*Como habéis elegido los puntos concretos que están en la figura, no podéis modificar el vector.* *Vamos a construir el vector que vaya de aquí a aquí* (señala otros dos vértices de la figura inicial y su imagen, también homólogos igual que M y N, elegidos por las alumnas).	Petición técnica
María	(Construye el vector)	Demostración técnica
Profesora	*¿Ese vector es igual que el otro?*	
María	*eh sí*	Asentimiento
Profesora	*Vale. A ver, chicos que esto ha causado confusión. El vector RS que hemos puesto ahora de aquí a aquí también podríamos haber dicho que es el vector de traslación, pero es que es exactamente el mismo vector que MN. La distancia entre cada punto y su imagen es la misma.*	Recapitulación
María Q. (desde el sitio)	*¿El vector se tiene que poner encima*?	Conexión
Profesora	*Lo podéis poner encima o lo podéis poner fuera siempre que su longitud mida la distancia de un punto a su homólogo.* *Podemos construir un vector y ajustarlo para que sea el vector de traslación.* (Empieza a construirlo utilizando el portátil).	Búsqueda de alternativas.

	Mira la diferencia, ellas al elegir de punto de la figura a punto de la figura directamente no han utilizado tanteo. Han elegido el vector que es.	
María Q. (desde el sitio)	*Ya*	Asentimiento
Profesora	(Lo hace, utilizando el portátil, mientras habla) *Si vosotros cogéis un vector cualquier así y luego hacéis la traslación de esta figura respecto a ese vector.* (Después de problemas técnicos porque los cuadros de textos que hay por la pantalla obstaculizan pinchar la figura y el vector) *Ahora ajustamos el vector y vale, lo he conseguido. Este vector transforma esta figura en esta otra. Pero, lo he hecho por tanteo. Lo que cumple este vector es que es exactamente igual que este* (lo arrastra hasta colocarlo encima del que habían construido las alumnas) *y es igual que este de aquí* (lo arrastra encima del que se ha construido ahora). *¿Dudas?*	Demostración técnica
	(No hay respuesta)	

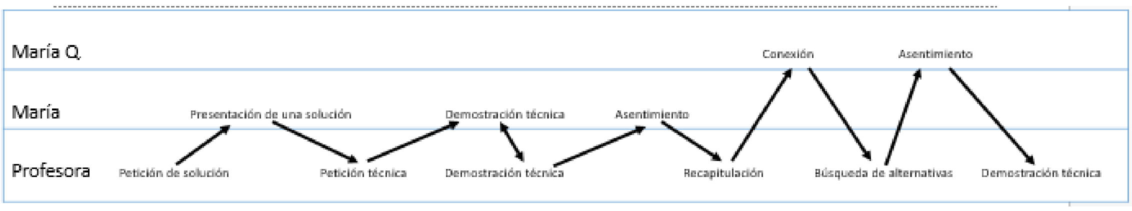


Figura 48 Esquema visual del episodio 5

Oportunidades de aprendizaje

Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos

- *Revisar la noción de traslación*: Cuando la profesora pregunta por traslación, la alumna que expone la solución inmediatamente lo relaciona con vector. El elemento que define la traslación es un vector.
- *Repasar los elementos que definen un vector*: Ya se había repasado con anterioridad en e_5 y aparece en siguientes episodios. Sin embargo, en esta ocasión cuando la profesora dice "es el mismo vector" hace referencia únicamente a la longitud. No hace referencia a la dirección y al sentido. Quizás esto tenga consecuencias en el aprendizaje.

Oportunidades orientadas a diferentes estrategias

- *Aprender la importancia de buscar distintas alternativas cuando una estrategia no funciona.* La propuesta de María de intentar utilizar el arrastre para modificar el vector no es una acción adecuada por cómo está construido el vector. Ya que el origen y el final del vector eran puntos de las figuras, así no se puede modificar el vector sin modificar la figura inicial. Este obstáculo tecnológico genera la oportunidad de buscar alternativas para la argumentación.
- *Aprender que existen varios procesos para resolver un problema.* Se presentan varios caminos para resolver la cuestión que se plantea. Uno de ellos es aplicable a "lápiz y papel" y el otro utiliza "tanteo" y el carácter dinámico del SGD es necesario para que se pueda aplicar.
- *Recordar la importancia de argumentar empíricamente y la posibilidad de hacerlo utilizando el carácter dinámico del SGD.*

Oportunidades orientadas a autorregulación

- *Aprender la importancia de visualizar la explicación matemática*. La profesora complementa su explicación con el apoyo tecnológico. Esto genera una oportunidad de aprender la importancia de visualizar la explicación matemática que se está exponiendo, que los alumnos podrán aplicar en futuras ocasiones.

Episodio 6 (e_6): Construcción de un eje de simetría, utilizando la mediatriz entre puntos homólogos.

Tabla 28 Transcripción del episodio 6

Participante	**Intervención**	**Interpretación**
Profesora	*¿Podéis salir vosotras a explicar cómo lo habéis hecho? Ellas lo han hecho sin utilizar el tanteo.* *Utilizar el tanteo es decir hago una recta y ahora lo ajusto para que me quede la simetría. ¿Por qué me interesa que no lo hagamos así? Porque en otros ejercicios no vamos a estar en un entorno dinámico en el que puedo decir cojo esto y lo arrastro.*	Petición de solución. Invitación a la generalización
Tamara	*Pues para hacer la simetría que es el pupitre azul, como han dicho nuestras compañeras, lo que hay que hacer es una recta. Esa recta lo que tiene que cumplir es que sea paralela a cualquiera de estos dos segmentos, el de arriba o el de abajo. Además, para que sea simetría otro requisito que debe cumplir es que pase por un punto intermedio de las dos figuras.*	Exposición con argumentación
Profesora	*Vale. ¿Y la recta que pasa por un punto medio…?*	Validación Petición de vocabulario matemático
Tamara	*Es la mediatriz.*	Vocabulario específico
Profesora	*Ha salido antes. En dos figuras simétricas, el eje de simetría es la mediatriz entre puntos homólogos. Sabiendo que puntos homólogos son el punto y la imagen.* *Haced la mediatriz de los segmentos para ir viendo que va quedando ahí. Con el botón mediatriz.*	Validación Recapitulación Petición de demostración técnica

Elena	(Se acerca al portátil y hace la mediatriz entre dos puntos homólogos).	Demostración técnica
Profesora	*Vale, de ese punto* (señalando) *su imagen es este de aquí* (señalando). *La mediatriz entre ambos es el eje de simetría.* *Ahora, coged otro punto y su imagen y haced de nuevo la mediatriz.*	
Elena	(Se acerca al portátil y lo hace con otros dos puntos homólogos. La recta coincide con la anterior)	
	Vale, dadle a mediatriz y hacer otra vez la mediatriz entre otros dos puntos que sean homólogos.	
Tamara	(Lo intenta hacer. Pulsa en el botón mediatriz y en uno de los segmentos de la figura inicial. Así se genera la mediatriz del segmento en lugar de la mediatriz que buscábamos).	Obstáculo tecnológico
Profesora	*Uh ¿qué ha pasado? Ha hecho la mediatriz del segmento. El programa se ha pensado que queríamos la mediatriz de este segmento.*	
Tamara	(Da para atrás, marca un vértice y su homólogo en la figura. Estos puntos son O y P. Luego selecciona la opción de mediatriz y los dos puntos).	
Profesora	(Primero llama la atención a alumnas que no están haciendo caso). *Cuando marcamos mediatriz y señalamos los puntos O y P lo que está haciendo es la mediatriz del segmento que va de O a P, pero no hace falta que dibujemos el segmento. Cuando hacemos la mediatriz con lápiz y papel normalmente necesitamos marcar el segmento para hacer el proceso … pero con GeoGebra tenemos la ventaja de que no hace falta.*	Complemento de la explicación

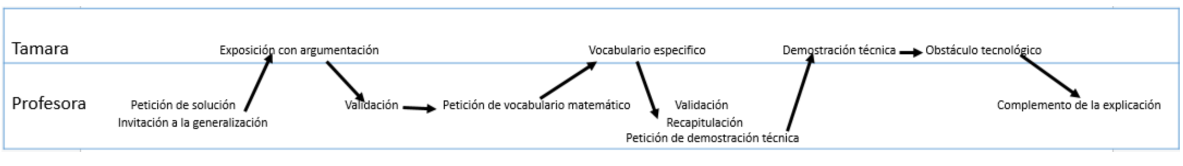


Figura 49 Esquema visual del episodio 6

Oportunidades de aprendizaje

Orientadas a contenidos matemáticos específicos

- *Recordar qué es la mediatriz.* No es necesario dibujar un segmento para hacer una mediatriz, basta con dos puntos. Es la recta cuyos puntos se encuentran a la misma distancia de otros dos.
- *Repasar la noción de simetría*. Ha aparecido en ocasiones anteriores. Ahora, se vuelve a recordar que el elemento que define una simetría es una recta que recibe el nombre de eje de simetría.
- *Aprender que el eje de simetría coincide con la mediatriz de dos puntos homólogos cualquiera*. La profesora pide la demostración técnica y la alumna lo demuestra, haciendo uso de la tecnología.

Orientadas a diferentes estrategias

- *Aprender la necesidad de justificar mediante argumentos matemáticos*: Se resalta la importancia de generar una solución sin utilizar "tanteo". Además, la alumna expone una solución argumentada y la profesora pide una demostración técnica.

Orientadas a autorregulación

- *Recordar la necesidad de expresarse con el lenguaje matemático adecuado:* La profesora solicita el nombre de la recta que "pasa por el punto medio de las dos figuras".
- *Aprender la importancia de estar atentos y participativos en las discusiones en gran grupo.* Cuando la profesora reprende a alumnas que no están haciendo caso, reclama su atención y participación en el proceso que se está llevando a cabo. Esto genera una oportunidad de aprender la importancia de no molestar y no estar distraídas, que los alumnos podrán aplicar en futuras ocasiones en clase o en el ámbito profesional.

Episodio 7 (e_7): Construcción de un centro de giro, utilizando mediatrices entre puntos homólogos.

Al comienzo de este episodio, las alumnas encuentran el centro de giro utilizando el arrastre de GeoGebra. Se considera una solución con argumentación utilizando el carácter dinámico del SGD. Están utilizando que el centro de giro es el único punto fijo en el movimiento “giro”. Entonces, es el lugar donde los puntos coinciden con sus homólogos. Se busca un razonamiento que sirva en general para encontrar puntos homólogos en cualquier situación, en contexto de SGD o en contextos no dinámicos.

El movimiento de giro en este caso es muy particular ya que el ángulo es 180º, por ello coincide con la intersección de la mediatriz entre dos puntos homólogos y el eje de simetría que ya está dibujado. Además, está en la intersección de los segmentos que unen puntos homólogos.

Ninguna pareja resuelve esta parte utilizando un procedimiento válido para cualquier giro en general. La que más se aproxima es la que está compuesta por Cristina y Radhika. En esta sesión Radhika está ausente por lo que la profesora invita a Cristina a participar. Al final, es la profesora quien corrige el razonamiento matemático y generaliza para cualquier giro.

Tabla 29 Transcripción e interpretación del episodio 7

Participante	**Intervención**	**Interpretación**
Profesora	*Bueno, ¿y el centro de giro? ¿Cómo habéis sacado el centro de giro que lo tenéis ahí indicado? ¿Cuál es?*	Petición de solución.
Elena	(Arrastra el de la actividad y llega a juntar la esquina inferior izquierda con su homólogo. Señala con el dedo ese punto)	Exposición con argumentación técnica
Profesora	*¿Ese de ahí qué cumple?*	Petición de formalización
Elena y Tamara	(Se quedan paradas mirando a la PDI, no recuerdan como lo han sacado).	
Profesora	*Habéis dibujado una recta auxiliar…*	

Tamara	*Primero hemos juntado la figura inicial con la que es el giro de la figura inicial* (utilizando el arrastre) *y seleccionamos un punto ¿en este caso cuál era?*	Ampliación de la argumentación
Elena	*Este* (señala la esquina inferior derecha de la figura)	
Tamara	*Este* (señala) *y luego hemos marcado el punto homólogo de la figura girada. El siguiente paso es hacer la mediatriz entre los dos puntos.*	
Profesora	*¿Y ya?*	
Tamara	*No. El centro de giro es la intersección entre esta recta que hemos hallado* (señala la mediatriz con la mano) *y la paralela a ambas figuras.*	
Profesora	*¿La paralela a ambas figuras? Eso es el eje de simetría ¿tiene algo que ver con esto?*	
Tamara	*No*	
Profesora	En verdad no tiene nada que ver. Igual es casualidad ¿no? ¿Habéis comprobado de verdad que sea el centro de giro?	
Tamara y Elena	Sí, lo hemos comprobado.	
Profesora	¿Cómo lo habéis comprobado?	
Tamara	Haciendo un giro con las mismas características y viendo que la figura coincide.	
Profesora	(Preguntando a cristina que está sentada) *¿Vosotras cómo habéis sacado el centro de giro? ¿Igual?*	Invitación a la participación. Petición de solución
Cristina (desde el sitio)	*No. Haciendo una recta entre puntos homólogos y haciendo la mediatriz de la recta.*	Exposición con argumentación

Profesora	*Pero eso es lo mismo que han hecho ellas.*	Conexión
Cristina (desde el sitio)	*No. Ellas lo han hecho con… Nosotras hemos hecho la recta* que une un punto y su homólogo y luego la mediatriz de la recta.*	
Profesora	*Sal y lo explicas.*	Invitación a la participación. Petición de demostración técnica
Cristina (en la PDI)	*Se hace una recta* este punto a este punto y se hace la mediatriz. Donde se corta la recta* con la mediatriz es el centro de giro.*	Ampliación de la argumentación.
Profesora	*Vale. Es la intersección entre el segmento** que une los puntos homólogos y la mediatriz.* *A ver, es un punto. Sí o sí necesitamos dos rectas para que haya una intersección. No es como lo otro que simplemente hacíamos la mediatriz y decíamos: pues esta mediatriz es el eje de simetría.* *Aquí necesitamos dos rectas al menos, para que sea la intersección.* *Pues ellas dicen, la intersección del eje de simetría con la mediatriz. Pero si ese eje de simetría no existiera y simplemente estuviera el giro…*	Corrección del vocabulario matemático. Ampliación de la argumentación.

*Confusión en vocabulario matemático, hablan de recta cuando deberían decir "segmento". La profesora no lo corrige.

**Aquí corrige el vocabulario.

Tamara	*Hacemos una recta cualquiera*	
Profesora	*¿Una recta cualquiera me valdría? Vamos a ocultar el eje de simetría…* (se acerca al ordenador para ocultar el eje de simetría) *¿Entonces, cómo yo sé que esto está aquí?*	
Tamara	*Cualquier recta que pase por ese punto sé que su intersección con la otra es el eje de simetría.*	
Profesora	*Pero es que ese punto me lo habéis dado vosotras.* (Lo oculta) *Ese punto tampoco existe y es el que hay que averiguar dónde está.*	
Elena	(Señala en la PDI). *Haríamos el segmento que va de aquí a aquí*. (Es el segmento que une puntos homólogos, del que ya había hablado Cristina).	
Profesora	*Vale. Este es un proceso para este caso concreto.*** Voy a hacerlo con otro proceso. Gracias.* *El centro de giro cumple que está a la misma distancia de un punto y de su homólogo y de otro punto y de su homólogo. O sea, la distancia entre este punto y el centro* (señala en la pizarra) *y entre este punto y el centro* (señala en la pizarra) *es la misma. Igual que con el eje de simetría pasaba lo mismo, estaba a la misma distancia de un punto que de su homólogo. Pero claro, es un punto y necesito la intersección de varias cosas. Si yo cojo este punto de aquí, que lo voy a renombrar y lo voy a llamar V' porque es el homólogo de V. También la mediatriz de estos dos tiene que pasar por el centro.* (Hace la mediatriz de esos dos puntos) *Luego el centro puede ser la intersección entre dos de las mediatrices. Otra manera de verlo, menos intuitiva quizás.*	Tratamiento de casos particulares

*** Da por válido un proceso que solo será válido para este caso concreto por las características del ejercicio. Confusión. Veremos si tiene consecuencias en el aprendizaje al analizar el sistema de evaluación.

Cristina (desde el sitio)	*Es más fácil la otra.*	
María Q (desde el sitio)	*¿Pero por qué usas ese proceso?*	
Marta	*Necesito dos rectas para tener un punto. ¿Cómo hago un punto sin tener dos rectas?*	
María Q. (desde el sitio)	*Pues mira, S y S' lo juntas. V y V' lo juntas* (se refiere a lo arrastras). *Ahí ya te va a salir el punto.*	
Marta	*Vale, estoy de acuerdo. Mira lo junto y ese es el punto, pero eso lo puedo hacer aquí que estamos en un entorno dinámico. Pero cómo calculo el centro de giro si el entorno no es dinámico. ¿Si me dan una representación en lápiz y papel?* *No puedo juntarlo, ya que no puedo arrastrarlo.*	
María Q. (desde el sitio)	*Ya, pero eso no pasa aquí. Vamos a ver, haces la línea que une S con S' y V con V'. Aunque no supiéramos donde está el centro, esa intersección nos lo va a dar.*	Exposición sin argumentación.
Profesora	*Lo que me acabas de decir es otro procedimiento sin necesidad de hacer mediatrices*. (Lo hace en la pizarra). *Si uno este punto con su homólogo y uno esté punto con su homólogo, la intersección pasa por el centro de giro. Si uno este punto con su homólogo, la intersección pasa por el centro de giro. Si uno este punto con su homólogo, la intersección pasa por el centro de giro…* *¿Pasará siempre con cualquier giro?* *Vamos a poner otro giro que no sea un ángulo de 180º para ver si pasa o no. (Dibuja un triángulo y un punto). Paula dime un ángulo de giro, el que sea de 0 a 360 que no sea 180*	Invitación a la generalización. Invitación a la participación.

Paula (desde el sitio)	*90º*	Generalización
Profesora	*¡Qué facilón! Vale lo giro un ángulo de 90º. ¿Cuál es la imagen por este giro de este punto?* (Nadie contesta) *Contestadme por favor.* (Arrastra el vértice que ha marcado para que se desplace el homólogo). *La imagen es este de aquí.* (Va preguntando por todos los vértices del triángulo y ahora sí contestan los alumnos). *A ver entonces, si yo uno este con este* (lo señala con la mano) *que es un punto con su imagen ¿está pasando por el centro de giro?*	Invitación a la participación
Cristina y otros (desde el sitio)	*No*	Corrección de procedimiento matemático
Profesora	*Entonces si hago los segmentos que unen puntos homólogos, no pasa por el centro de giro*. (Hace los segmentos que unen puntos homólogos). *Luego si uno puntos homólogos no funciona en general. Este proceso no me vale.* *El otro proceso que habíamos dicho era el de: hago la mediatriz y pasa por la mediatriz y por el segmento que une los puntos homólogos. Entonces cojo dos puntos cualesquiera y voy a hacer la mediatriz y el segmento que los une (lo hace). ¿Es el centro de giro en este caso?*	Corrección de procedimiento matemático.
Cristina (desde el sitio)	*Pero yo te he dicho que no…*	
Profesora	*Luego en general no pasa que la intersección del segmento que une puntos homólogos y la mediatriz sea el centro de giro. Y si lo hago con otros dos… tampoco. Entonces… ¿qué es lo que tengo que hacer? Pues tengo esa mediatriz y hago la mediatriz de otros dos puntos homólogos.* (Lo hace) *Y ahora la*	Generalización

	mediatriz de este punto con su homólogo (lo hace). *También pasa por el centro de giro. Con coger dos puntos y sus homólogos, la intersección de esos dos ya es el centro de giro.* *No siempre coincide el segmento y la mediatriz. ¿Por qué ha coincidido antes? Porque el giro que teníamos era muy particular. Era un giro de 180º y el giro de 180º tiene unas características determinadas. Cuando el giro ya no es de 180º y es cualquier otro, lo que sí que cumple es que pasa por las mediatrices de los puntos homólogos.* *…* *Vale, conclusiones de este ejercicio*	Recapitulación
Cristina (desde el sitio)	*Que es más fácil hacerlo cuando es 180º*	

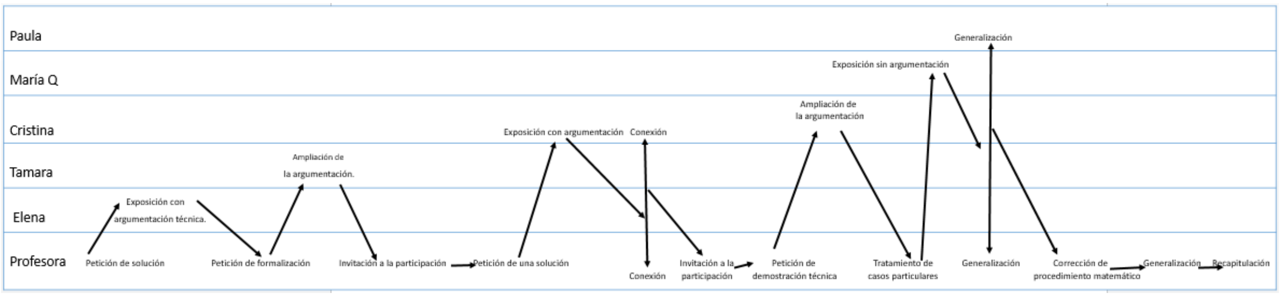


Figura 50 Esquema visual del episodio 7

Oportunidades de aprendizaje

Orientadas a contenidos matemáticos específicos

- *Repasar la noción de giro*. Ha aparecido en ocasiones anteriores. Ahora, se vuelve a recordar que es un movimiento con un único punto fijo que es el centro de giro y necesitamos conocer un ángulo.
- *Aprender procedimientos generales y particulares para encontrar el centro de giro*. Utilizando el carácter dinámico del SGD es posible encontrar el centro de giro, en general, arrastrando un punto hasta hacerlo coincidir con su homólogo. Además, es la intersección de las mediatrices de los

segmentos que unen puntos homólogos. En algunos casos particulares este punto coincide con la intersección de la mediatriz y el segmento que une puntos homólogos o con la intersección de segmentos que unen puntos homólogos.

Orientadas a diferentes estrategias

- *Aprender la necesidad de encontrar una estrategia general para resolver un ejercicio*: Existen varios procesos que llevan a la resolución del problema planteado en este episodio. Sin embargo, queda patente la necesidad de generalizar para encontrar un proceso que valga en todos los casos.

Orientadas a autorregulación

- *Aprender la importancia de plantear otros casos como contraejemplos de la solución dada.* El hecho de que una alumna dé un ángulo cualquiera para generalizar el caso particular, genera la oportunidad de aprender la importancia de aportar contraejemplos ya que este caso demuestra que las soluciones expuestas hasta el momento no sirven al generalizar.
- *Recordar la importancia de estar atento durante la discusión en gran grupo y participar.* En varias ocasiones se invita a alumnos a participar y se llama la atención de alumnos sentados en su sitio.

Episodio 8 (e_8): Recapitulación del problema 2

Tabla 30 Transcripción e interpretación del episodio 8

Participante	**Intervención**	**Interpretación**
Profesora	*Las conclusiones son que para hallar el vector de traslación unimos puntos homólogos. Para el eje de simetría basta con hacer la mediatriz de dos puntos homólogos pues la mediatriz de todos los puntos homólogos coincidirá en el mismo lugar. Para el centro de giro no me sirve en general con unir puntos homólogos, aunque sí en este caso particular, hacemos la mediatriz de dos puntos homólogos y el segmento que une los*	Recapitulación

	puntos homólogos. Si pasamos a generalizar eso, no se cumple siempre.	

Figura 51 Esquema visual del episodio 8

Oportunidades de aprendizaje

Oportunidades orientadas a autorregulación

- *Aprender la importancia de realizar un resumen que recapitule los resultados obtenidos.* Tras la resolución del problema, este resumen puede ayudar a los alumnos a ver con claridad cuáles han sido los contenidos tratados. Además, les da la oportunidad de valorar la importancia de resumir de una manera esquemática.

6.1.2. Análisis integrado del problema 2

En este punto nos centramos en el problema 2 porque la discusión en gran grupo ha sido analizada en profundidad en el apartado anterior. En las siguientes secciones, expondremos el análisis integrado de los problemas 1, 3 y 4 de la secuencia didáctica, mientras que el estudio de su puesta en común se puede leer en el Anexo II.

Mostramos a continuación la tabla que ilustra la clasificación, según tipos de orquestación (Drijvers et al., 2010) y estadios de la discusión (Morera, 2013), de los ocho episodios en los que hemos dividido el problema 2.

Tabla 31 Estructura del problema 2

DISCUSIÓN EN GRAN GRUPO	Situación del problema	Presentación de una solución (argumentada)	Estudio de las estrategias para resolver o argumentar	Estudio de casos particulares o extremos	Contraste entre diferentes soluciones	Conexiones con otras situaciones	Generalización y conceptualización	Reflexión sobre el progreso matemático	*(Tipos de estadio)*
Demostración técnica							e_7		
Explicación de la pantalla	e_1							e_8	
Conexión pantalla-pizarra									
Discusión de la pantalla		e_2		e_7		e_7			
Descubrir y mostrar			e_6						
Trabajo del Sherpa			e_3,e_4,e_5						
(Tipos de orquestación)									

Siguiendo el esquema de análisis del apartado 6.1.2. elaboramos una descripción global de los episodios que forman parte del problema 2. El objetivo es dar significado a la representación de los episodios de la tabla 31.

En el primer episodio (e_1) la profesora sitúa el problema, recordando enunciado y objetivos. Se trata de una explicación en pantalla. En el segundo (e_2), mediante una discusión conjunta tradicional, se presenta una solución argumentada. Recuerdan que en la simetría las imágenes quedan “enfrentadas” y que el carácter dinámico de GeoGebra permite arrastrar figura para justificar decisiones.

En los episodios 3 y 4 la pareja que está presentando su trabajo explica cómo ha encontrado el eje de simetría (e_3) y el centro de giro (e_4). En ninguno de los dos casos han utilizado un procedimiento geométrico. Se trata de soluciones aproximadas a las que han llegado utilizando el carácter dinámico del software. Según los tipos de orquestación de Drijvers et al. (2010) estos dos episodios son trabajo del sherpa ya que las alumnas presentan su trabajo usando la tecnología, al igual que en el episodio 5. Sin embargo, para construir el vector de traslación no han aproximado la solución. En este caso utilizan un argumento geométrico.

A continuación, la profesora invita a participar a una pareja que para encontrar el eje de simetría y el centro de giro no ha utilizado el carácter dinámico del software. Esta pareja ha utilizado argumentos geométricos. En el episodio 6 (e_6) una de las estudiantes explica razonadamente que el eje de simetría se encuentra en la mediatriz de puntos homólogos. Utiliza el trabajo realizado y su compañera la ayuda con el manejo del SGD.

El episodio 7 (e_7) es algo más largo que el resto, pero hemos decidido considerarlo como un único episodio porque es un segmento temporal de la clase en el que se busca un objetivo. La orquestación de la profesora pretende guiar hacia el descubrimiento de que el centro de giro es la intersección de las mediatrices de los segmentos que unen puntos homólogos. En un primer momento, se produce una discusión conjunta en pantalla en la que se está estudiando un caso particular. El giro es de 180º y, en este caso, el centro de giro coincide con la intersección del segmento que une dos puntos homólogos y su mediatriz. La discusión sobre esta situación concreta sirve para conectar con otras situaciones. Es la profesora quien mediante una demostración técnica generaliza el resultado. Para finalizar este problema, realiza una recapitulación explicando en pantalla (e_8) que se ha considerado reflexión sobre el progreso matemático.

Tras esta mirada a posteriori podemos fijarnos en el conjunto de los episodios como una serie que tiene significado en su globalidad. La riqueza de un problema viene determinada por las oportunidades de aprendizaje que genera. Sin embargo, no es un concepto intrínseco al propio problema ya que va acompañado de su gestión tanto por parte de la profesora como del grupo-clase. Consideramos el problema potencialmente rico porque que se han identificado un total de 19 oportunidades de aprendizaje distintas. Las resumimos, clasificadas según su naturaleza:

Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos

1. *Revisar la noción de simetría*
2. *Revisar la noción de giro*
3. *Revisar la noción de traslación*
4. *Repasar los elementos que definen un vector*
5. *Recordar qué es la mediatriz*

6. *Aprender que el eje de simetría coincide con la mediatriz de dos puntos homólogos cualquiera.*
7. *Aprender procedimientos generales y particulares para encontrar el centro de giro.*

Oportunidades orientadas a diferentes estrategias

8. *Aprender a conjeturar*
9. *Aprender a argumentar empíricamente, utilizando el arrastre*
10. *Aprender la importancia de buscar distintas alternativas cuando una estrategia no funciona*
11. *Aprender que existen varios procesos para resolver un problema*
12. *Recordar la importancia de argumentar empíricamente y la posibilidad de hacerlo utilizando el carácter dinámico del SGD*
13. *Aprender la necesidad de justificar mediante argumentos matemáticos*
14. *Aprender la necesidad de encontrar una estrategia general para resolver un ejercicio*

Oportunidades de autorregulación

15. *Aprender la necesidad de expresarse con el lenguaje matemático adecuado*
16. *Aprender la importancia de preguntarnos conexiones con otras situaciones*
17. *Aprender la importancia de visualizar la explicación matemática*
18. *Aprender la importancia de estar atentos y participativos en las discusiones en gran grupo*
19. *Aprender la importancia de plantear otros casos como contraejemplos de la solución dada*

Cabe destacar que 1. *Revisar la noción de simetría*, 2. *Revisar la noción de giro, 15. Aprender la necesidad de expresarse con el lenguaje matemático adecuado, 18. Aprender la importancia de estar atentos y participativos en las discusiones en gran grupo* aparecen en dos ocasiones. Además, 9. *Aprender a argumentar empíricamente, utilizando el arrastre* aparece en tres ocasiones y 12. *Recordar la importancia de argumentar empíricamente y la posibilidad de hacerlo* *utilizando el carácter dinámico del SGD* es una oportunidad de aprendizaje similar a la 9 que añade la oportunidad de que los alumnos se hagan conscientes de la importancia de utilizar el carácter dinámico del software.

El concepto de riqueza de un problema no es intrínseco al propio problema, sino que va acompañado de su gestión en el entorno de enseñanza-aprendizaje, tanto por parte de la profesora como del grupo-clase. Después de considerar el problema como rico, cabe preguntarse qué factores pueden haber influido para conseguir esta riqueza. Asumiendo la complejidad de analizar estas situaciones, como Morera (2013) entendemos que las dos características básicas del diseño experimental de esta investigación son claves: el entorno tecnológico y el entorno colaborativo.

La utilización del carácter dinámico del SGD ayuda a encontrar intuitivamente los elementos que definen los movimientos rígidos. Por ejemplo, si imaginamos el mismo problema en un entorno de lápiz y papel, hubiera sido imposible encontrar el eje de simetría y el centro de giro empleando los argumentos de los episodios e_3 y e_4. Observamos que las soluciones que se aportan en estos episodios son aproximadas y, por ello, se insiste en episodios siguientes en la importancia de argumentar matemáticamente.

Respecto al uso del entorno colaborativo, los alumnos entienden que la discusión en gran grupo de un problema que antes se ha trabajado por parejas es un espacio donde construir conocimiento conjuntamente. Es la profesora quien guía para tratar el problema de una determinada forma y conecta con otras situaciones. La distribución de la tabla 31 muestra que la mayoría de los estadios se sitúan en la parte inferior, lo cual demuestra que los alumnos han tenido el protagonismo.

6.1.3. Análisis integrado del problema 1

El análisis en profundidad de la puesta en común del problema 1 se puede leer en el Anexo II.I. Recordamos aquí el enunciado:

PROBLEMA 1:

Una empresa ha diseñado un juego para niños que permite armar figuras como el dibujo siguiente.

Figura 52 Para construir en el problema 1

Construye la figura anterior, aplicando un giro, una traslación, una simetría y una simetría deslizante a las piezas siguientes, según corresponda.

Señala en cada pieza, mediante un cuadro de texto, el nombre del movimiento que has aplicado y su(s) elemento(s).

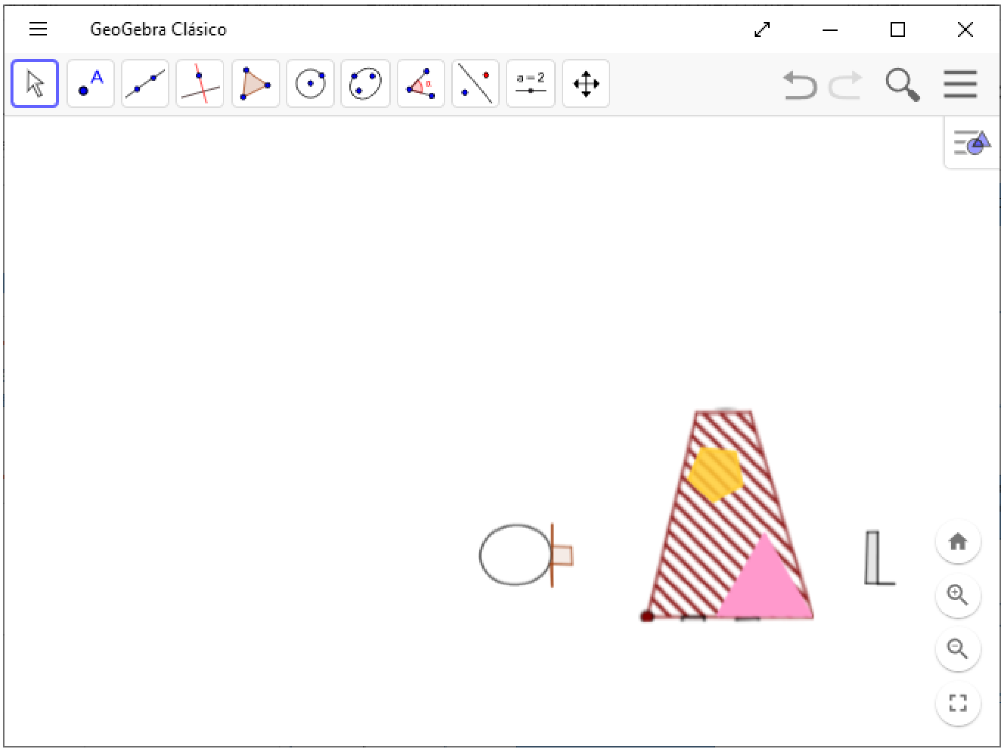


Figura 53 Piezas del problema 1

El problema 1 tiene dos apartados con cierto paralelismo. El objetivo del primer apartado es trabajar la elección y la construcción de movimientos rígidos. En el segundo apartado se pide identificar con su nombre cada uno de los elementos.

Construir una figura geométrica exige al alumno hacer explícitas un mínimo de propiedades geométricas necesarias.

La tabla siguiente ilustra la clasificación de los diez episodios en los que se ha dividido el problema 1. Recordamos que la naturaleza de los episodios está caracterizada por dos elementos: tipos de orquestación (Drijvers et al., 2010) y estadios de la discusión (Morera, 2013).

Tabla 32 Estructura del problema 1

DISCUSIÓN EN GRAN GRUPO	Situación del problema	Presentación de una solución (argumentada)	Estudio de las estrategias para resolver o argumentar	Estudio de casos particulares o extremos	Contraste entre diferentes soluciones	Conexiones con otras situaciones	Generalización y conceptualización	Reflexión sobre el progreso matemático	*(Tipos de estadio)*
Demostración técnica						e_{10}		e_7	
Explicación de la pantalla	e_1								
Conexión pantalla-pizarra						e_6			
Discusión de la pantalla		e_2	e_2	e_8		e_3,e_9	e_5, e_8		
Descubrir y mostrar		e_3			e_3				
Trabajo del Sherpa			e_4						
(Tipos de orquestación)									

Tras haber analizado en profundidad cada uno de los episodios, se considera conveniente realizar un análisis desde un punto de vista más general. Se trata de elaborar una descripción global para dar significado a la representación de los episodios de la tabla 32.

La profesora explicando en pantalla, sitúa los alumnos para empezar la discusión conjunta después del trabajo en parejas en el aula de informática en la sesión anterior (e1). Recuerda contenidos didácticos como la herramienta “árbol del problema” y las fases de la discusión en gran grupo.

A continuación, Cristina comienza a exponer la solución que ha encontrado junto con su compañera Radhika. Para colocar una de las piezas han aplicado un giro, con un ángulo determinado, pero tenían total libertad para elegir el centro de giro. En el primer episodio surge una discusión sobre la amplitud del ángulo de giro. Se concluye con la importancia de indicar el sentido de giro cuando se indica la amplitud del ángulo (e_2). En la tabla, este episodio se ha considerado discusión en pantalla ya que se realiza una discusión conjunta sobre lo que está ocurriendo en pantalla. Cristina comienza presentando una solución y después se estudian distintas estrategias para argumentar.

En el siguiente episodio (e3) Radhika continúa contando cómo han construido la figura que se pedía. Han aplicado a otra pieza una simetría axial. La clase se hace consciente de que no existe libertad para colocar el eje de simetría, pues depende de dónde se haya colocado el centro de giro de la pieza anterior. Se revisa la noción de simetría, el elemento fundamental es el eje e invierte la orientación. Este episodio se ha clasificado en la tipología descubrir y mostrar pues Radhika expone una solución que se utiliza deliberadamente para discutir sobre la libertad de elección del eje. Se conecta con otras situaciones en las que la pieza podría haber sido la primera en moverse, por lo que existiría libertad total de colocación del eje. También se podrían haber realizado previamente otros movimientos que condicionaran a colocar el eje en otra posición.

Cristina explica que a otra pieza le han aplicado una simetría deslizante (e_4). Esto da la oportunidad de revisar la definición de este movimiento. Poniendo en común otras soluciones, los alumnos tienen la oportunidad de aprender que puede surgir de la composición de simetría y traslación o traslación y simetría, aunque se dice que los movimientos no son conmutativos (se demostrará en el episodio 10). Recalcamos que no existe una única solución y se hace necesario expresarse con el lenguaje matemático adecuado. Se ha clasificado como trabajo del sherpa ya que Cristina utiliza la tecnología para presentar su trabajo al resto de los participantes y responder las dudas de la profesora. En este episodio se estudian diferentes estrategias para resolver o argumentar.

En el episodio 5 (e_5) se da especial importancia al lenguaje matemático, se recuerda el nombre del "centro de giro" y se recalca la importancia de diferenciar entre recta y segmento. Es fundamental saber cuáles son las características del vector: módulo, dirección y sentido. Se demuestra utilizando el carácter dinámico del software que dos vectores representados por las alumnas que están exponiendo la solución son el mismo vector. De nuevo, se hace esencial expresarse con el leguaje matemático adecuado. Este episodio es una discusión conjunta sobre lo que está ocurriendo en la pantalla que genera un ambiente idóneo para la generalización de un resultado encontrado.

Cristina y Radhika vuelven a sentarse en sus sitios en clase. En el siguiente episodio (e_6) tiene lugar conexión pantalla-pizarra ya que la profesora utiliza una pizarra tradicional para anotar los resultados obtenidos en el entorno dinámico. Se recuerda que los únicos movimientos rígidos posibles en el plano son traslación, giro, simetría o simetría deslizante. Debido a esto, la composición de movimientos cualquiera en el plano, originará uno de los cuatro. Varias alumnas plantean dudas y se pone énfasis en la necesidad de demostrar las propiedades que se enuncian. En este episodio se conecta con conocimientos matemáticos que aún se tienen que introducir.

La profesora, en el episodio 7 (e_7) vuelve a recordar la noción de simetría deslizante que ya había aparecido en el episodio 4. Es una demostración técnica que sirve como balance de la puesta en común para que los alumnos reflexionen sobre aspectos matemáticos trabajados, por ello en la tabla 32 se ha considerado reflexión sobre el progreso matemático.

Se estudia un caso particular de composición de simetría y traslación en el episodio 8 (e_8): Cuando una el eje de simetría y el vector de traslación son perpendiculares. En ese caso, la composición origina una nueva simetría. La discusión que se genera permite recordar las características de una simetría. Se hace necesario recurrir a un caso particular, en el que el eje de simetría es vertical, pues los alumnos afirman que les resulta visualmente más sencillo. La profesora vuelve a corregir su lenguaje matemático y una alumna es capaz de auto-corregir un argumento equivocado. Este episodio se considera una discusión en pantalla que permite la generalización y conceptualización.

El episodio 9 (e_9) vuelve a ser una discusión en pantalla. En este caso se produce la conexión con otros conceptos matemáticos. Cuando la composición de una simetría y una traslación genera una nueva simetría, el nuevo eje de simetría es paralelo al inicial. Se argumenta este hecho empíricamente, utilizando el arrastre. Cristina no se conforma con la demostración técnica, pregunta dudas y así, ejemplifica, haciendo patente la importancia de preguntar dudas.

En el último episodio (e_{10}) se comprueba algo que ya se había enunciado en el episodio 4: la composición de una simetría y una traslación no es conmutativa, aunque genere un movimiento rígido con el mismo nombre. Para ello, se vuelve a utilizar el arrastre. Es una demostración técnica en la que se conecta con conocimientos matemáticos previos.

Tras esta descripción, podemos fijarnos en el conjunto de episodios como una serie que tiene significado en su globalidad. Se hacía necesaria una mirada a posteriori ya que en el análisis en profundidad de casa episodio el foco era demasiado concreto.

Como se ha evidenciado en el análisis, consideramos el problema potencialmente rico, ya que se han identificado un total de 23 oportunidades de aprendizaje distintas. Las resumimos, clasificadas según su naturaleza:

Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos

1. *Revisar la noción de sentido del giro*
2. *Revisar la noción de simetría*
3. *Revisar la noción de simetría deslizante*
4. *Aprender que, aunque simetría y traslación no sean conmutativos, ambos generan una simetría deslizante*
5. *Revisar el vocabulario específico*
6. *Repaso de los elementos que definen a un vector, cuando dos vectores son iguales*
7. *Diferenciación de recta y segmento*
8. *Conocer que la composición de movimientos en el plano puede originar traslación, giro, simetría o simetría deslizante*
9. *Aprender que, si el eje de simetría es perpendicular al vector de traslación, la composición de simetría y traslación es simetría*
10. *Aprender que la composición de una simetría y una traslación con vector de traslación perpendicular al eje de simetría es una simetría donde el eje es paralelo al inicial*
11. *Aprender que la composición de una simetría y una traslación con vector de traslación perpendicular al eje de simetría es una simetría donde el eje se traslada según un vector de módulo la mitad que el inicial*

12. *Aprender que la composición de simetría y traslación no es conmutativa, pero genera un movimiento con el mismo nombre*

Oportunidades orientadas a diferentes estrategias

13. *No hay libertad para la elección del eje de simetría*
14. *Aprender que no existe una única solución*
15. *Aprender a argumentar empíricamente, utilizando el arrastre*
16. *Aprender a recurrir a casos particulares*

Oportunidades de autorregulación

17. *Necesidad de justificar mediante argumentos*
18. *Aprender la necesidad de expresarse con el lenguaje matemático adecuado*
19. *Aprender la importancia de plantear dudas*
20. *Aprender la necesidad de demostrar las propiedades que se enuncian*
21. *Aprender a auto-corregir la solución*

Oportunidades orientadas a contenidos didácticos específicos

22. *Aprender qué es el árbol del problema y para qué se utiliza*
23. *Conocer las fases de una discusión en gran grupo*

Cabe destacar que *15. Aprender a argumentar empíricamente, utilizando el arrastre* y *19. Aprender la importancia de plantear dudas* aparecen en dos episodios diferentes. Mientras que *18. Aprender la necesidad de expresarse con el lenguaje matemático adecuado* se da en tres situaciones.

Tras considerar el problema como rico, nos preguntamos qué factores han influido para conseguir esta riqueza. Siguiendo el mismo esquema que en el análisis del problema 2, consideramos las características básicas del diseño experimental: el entorno tecnológico y el entorno colaborativo.

El SGD crea un entorno formal para el tratamiento de las isometrías. Como hemos visto en diferentes episodios, la tecnología ha permitido justificar empíricamente, mediante la modificación de los elementos que intervenían en el problema. Por ejemplo, si imaginamos el mismo problema en un entorno tradicional de lápiz y papel, el sentido de comparar vectores (e_5) se pierde si no se conoce la teoría específica de este tema, ya que se compararían usando sus expresiones en coordenadas. Por tanto, es difícil un tratamiento de vectores de forma intuitiva en un entorno de lápiz y papel, lo cual sí se ha llevado a cabo en la secuencia utilizando un entorno tecnológico.

Por otro lado, el entorno colaborativo ha sido esencial para la gestión del problema. Los alumnos han llegado a formalizar con un detalle que no hubiera sido posible sin la discusión conjunta.

En la mayoría de las ocasiones, ha sido la profesora quien ha guiado al grupo a tratar el problema de una determinada forma y es quién ha conectado con otras situaciones, pasando a ejemplos distintos a los del problema. Podríamos pensar que es una discusión centrada en la profesora. No obstante, como señala la distribución de la Tabla 32 muchos han sido agrupados en la parte inferior, lo cual demuestra que los alumnos han tenido un gran protagonismo. La profesora ha llevado a cabo la orquestación de la situación.

6.1.4. Análisis integrado del problema 3

La puesta en común del problema 3 se puede leer en Anexo II. II.

El enunciado del tercer problema era el siguiente.

PROBLEMA 3:

En la figura se muestra un fragmento de un recubrimiento del plano, elaborado por M.C. Escher.

Se han marcado tres peces con las letras F, G, H.

a) *¿Qué movimiento rígido hace coincidir F con G?*

b) *¿Qué movimiento rígido hace coincidir F con H?*

c) *¿Qué movimiento rígido hace coincidir H con G?*

En cada uno de los apartados:

i. *Explicad, en un cuadro de texto, cómo habéis llegado a la conclusión de que se trata de ese movimiento.*

ii. *Construid los elementos esenciales el movimiento (centro, vector o eje).*

Figura 54 Fragmento de recubrimiento de recubrimiento del plano

(Escher, 1955)

La tabla ilustra la clasificación de los trece episodios en los que hemos dividido la discusión en gran grupo del problema 3, según tipos de orquestación (Drijvers et al., 2010) y estadios de la discusión (Morera, 2013). Realizamos una descripción global para dotar de significado a la representación de los episodios.

Tabla 33 Estructura del problema 3

DISCUSIÓN EN GRAN GRUPO	Situación del problema	Presentación de una solución (argumentada)	Estudio de las estrategias para resolver o argumentar	Estudio de casos particulares o extremos	Contraste entre diferentes soluciones	Conexiones con otras situaciones	Generalización y conceptualización	Reflexión sobre el progreso matemático	*(Tipos de estadio)*
Demostración técnica							e_{12},e_{13}		
Explicación de la pantalla	e_1					e_8			
Conexión pantalla-pizarra							e_{12},e_{13}		
Discusión de la pantalla									
Descubrir y mostrar		e_2,e_7	e_7	e_5	e_2	e_4, e_6			
Trabajo del Sherpa			e_3, e_9, e_{11}	e_{10}					
(Tipos de orquestación)									

En primer lugar, la profesora sitúa el problema mediante una explicación de la pantalla (e_1). Recuerda el enunciado, los objetivos y la anticipación, utilizando el árbol del problema (aprovecha esto último para conectar con el problema 4). Después, invita a una pareja a salir a la pizarra.

En el episodio 2 (e_2) la pareja comienza a presentar su solución. Han utilizado “polígonos auxiliares” sobre los que pueden usar el dinamismo de GeoGebra. Aunque uno de los objetivos del problema era que los alumnos buscaran nuevas estrategias diferentes a las del problema anterior para la identificación de movimientos rígidos, varias parejas recurrieron a la construcción de polígonos fuera de la imagen como apoyo visual. Las estudiantes exponen su razonamiento a través de la identificación del trabajo realizado.

Por su parte, el episodio 3 (e_3) se considera trabajo del sherpa. En este caso las alumnas presentan una estrategia para encontrar el vector de traslación. Luego, la profesora pregunta por otros procedimientos.

La discusión va más allá de los objetivos planteados y de lo que pide el propio enunciado conectando con "ángulo de giro" en los episodios 4 y 6 (e4) (e6). Surge la oportunidad de hacer referencia al ángulo cuando tratan temas relacionados con el centro de giro. En ambas ocasiones, las alumnas utilizan el trabajo que han realizado para exponer su razonamiento.

Se estudia un caso particular de giro en los episodios 5 y 10. En este caso, el centro de giro se encuentra en el borde de la figura a girar. Son los alumnos los que exponen el trabajo realizado. Uno de los episodios se ubica en la fila asociada a "Descubrir y mostrar" (e_5) y el otro en la asociada a "trabajo del Sherpa" (e_{10}).

En el episodio 7 (e_7) los sherpas cuentan razonadamente cómo han encontrado el centro de giro cuando ningún punto de la figura coincide con su homólogo en la representación no dinámica. Después, en el episodio 8 (e_8) la profesora conecta lo sucedido en e_7 con un resultado que desarrollará en siguientes episodios: la composición de un giro y una traslación es un giro. Varias parejas habían tenido dificultades, durante el trabajo en el aula de informática, para identificar el movimiento como giro, viéndolo como composición de giro y traslación.

En el episodio 9 (e_9) la profesora invita a otra pareja a participar, así el grupo conecta con otra solución al problema que se desarrollará durante los episodios 10 y 11. Estudian un caso particular (e_{10}) y el caso genérico que la pareja anterior que ya se había resuelto en e_7 (e_{11}).

La profesora tiene el protagonismo durante los episodios 12 y 13 (e_{12}) (e_{13}), realizando explicación en la pantalla y conectando pantalla-pizarra. Generaliza resultados que han surgido durante la discusión y recapitula, recurriendo además a conclusiones a las que se había llegado en problemas anteriores.

Según podemos observar en la tabla 33, si nos finamos en los tipos de orquestación, no ha habido “Discusión de la pantalla”. Es decir, no hemos interpretado en ningún momento que haya habido una discusión conjunta convencional. Además, fijándonos en las columnas, ha quedado en blanco la de “Reflexión sobre el progreso matemático”. Sin embargo, al finalizar la sesión doble, los alumnos tendrán la oportunidad de reflexionar por escrito sobre el progreso matemático a lo largo de todo el taller.

Consideramos el problema como “rico” desde el punto de vista de las oportunidades de aprendizaje porque observamos 26 oportunidades diferentes. Las clasificamos atendiendo a su naturaleza:

Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos

1. *Recordar la definición de isometría*
2. *Recordar las características de traslación, giro y simetría*
3. *Repasar los elementos que definen un vector*
4. *Repasar la noción de modulo*
5. *Repasar la noción dirección*
6. *Repasar la noción de sentido*
7. *Recordar un procedimiento general para encontrar el centro de giro.*
8. *Recordar un procedimiento particular para encontrar el centro de giro.*
9. *Revisar la noción de sentido del giro*
10. *Aprender que la composición de giro y traslación genera un giro*
11. *Recordar que la composición de simetría y traslación, de vector no perpendicular al eje de simetría genera una simetría deslizante. Aunque estos movimientos no sean conmutativos, traslación y simetría también generan simetría deslizante*
12. *Recordar que, si el eje de simetría es perpendicular al vector de traslación, la composición de simetría y traslación es simetría.*
13. *Recordar las características de un giro*
14. *Aprender que giro y traslación no son movimientos conmutativos pero su composición en un orden u otro genera un nuevo giro*

Oportunidades orientadas a diferentes estrategias

15. *Aprender que la construcción de un polígono auxiliar sobre el que se pueda aplicar el dinamismo de GeoGebra ayuda a recordar las características de los distintos movimientos rígidos y es posible extrapolar el razonamiento a un entorno no dinámico.*
16. *Aprender a argumentar empíricamente utilizando los medios técnicos.*
17. *Aprender a conjeturar*
18. *Aprender a argumentar matemáticamente.*
19. *Aprender la necesidad de encontrar la estrategia más corta para resolver un ejercicio*
20. *Aprender a argumentar empíricamente utilizando el arrastre*
21. *Aprender a argumentar utilizando procedimientos matemáticos y geométricos*

Oportunidades de autorregulación

22. *Aprender la importancia de participar en clase*
23. *Aprender la necesidad de justificar mediante argumentos*
24. *Aprender la necesidad de expresarse con el lenguaje matemático adecuado*
25. *Aprender la importancia de hacer conexiones con otras cuestiones.*

Oportunidades orientadas a contenidos didácticos específicos.

26. *Recordar qué es el árbol del problema y para qué se utiliza*

Señalamos que algunas oportunidades de aprendizaje se repiten en más de una ocasión: *7. Recordar un procedimiento general para encontrar el centro de giro* aparece en tres ocasiones. Mientras que las siguientes se repiten dos veces: *3. Repasar los elementos que definen un vector, 4. Repasar la noción de módulo, 5. Repasar la noción dirección, 6. Repasar la noción de sentido, 8. Recordar un procedimiento particular para encontrar el centro de giro, 9. Revisar la noción de sentido del giro, 10. Aprender que la composición de giro y traslación genera un giro, 13. Recordar las características de un giro, 16. Aprender a argumentar empíricamente utilizando los medios técnicos, 19. Aprender la necesidad de encontrar la estrategia más corta para resolver un ejercicio, 23. Aprender la* *necesidad de justificar mediante argumentos, 24. Aprender la necesidad de expresarse con el lenguaje matemático adecuado*

La característica diferenciadora con el problema 2 es que la representación de partida en el SDG no es dinámica. En este caso no es posible ayudarse del arrastre inicialmente para identificar las isometrías. Varias parejas han dibujado polígonos auxiliares, fuera de la imagen del enunciado, y afirman que estas figuras les aportan apoyo visual.

El entorno colaborativo es esencial para la resolución del problema. Ha sido la profesora la que ha llevado la orquestación. Sin embargo, si nos fijamos en la distribución de la tabla 33, igual que en las tablas anteriores, la mayoría de los estadios están agrupados en las dos últimas filas, lo cual demuestra que los alumnos han tenido un gran protagonismo.

6.1.5. Análisis integrado del problema 4

La puesta en común del problema 4 se puede leer en Anexo II. III.

Los alumnos encontrarán el siguiente documento Word al abrir la actividad del Campus Virtual.

PROBLEMA 4

El siguiente applet sobre giros y traslaciones, ha sido diseñado para estudiantes de primaria con edades comprendidas entre 6 y 8 años (Primero, Segundo o Tercero de Primaria):

https://www.geogebra.org/m/Vu4gP2tG#material/drj8ZQxS

Elegid un curso entre los tres posibles y e*laborad,* ***a partir del applet anterio****r, un desafío sobre contenidos matemáticos adecuados al nivel del curso.*

a) CURSO ELEGIDO:

b) *Redactad el desafío:*

c) *Según el Decreto Currículo de la Comunidad de Madrid, los contenidos y estándares de aprendizaje evaluables asociados a Orientación Espacial de los cursos son los siguientes. Subrayad los estándares de aprendizaje evaluables concretos que se pueden aplicar a vuestro desafío.*

1º Primaria

Orientación espacial. Situación en el plano y en el espacio.
34. Localiza partes del propio cuerpo y describe la posición de objetos del entorno respecto de uno mismo o de otro ser u objeto, utilizando descriptores: delante/detrás, arriba/abajo, derecha/izquierda, encima/debajo, etcétera.
35. Coloca un objeto o se coloca él mismo en una determinada posición, para situarlo o situarse delante o detrás, a la derecha o a la izquierda, encima o debajo de otro objeto o ser diferente.
36. Ejecuta consignas dadas en términos de hacia delante/hacia atrás, hacia arriba/hacia abajo, hacia la derecha/hacia la izquierda, en ejercicios psicomotores variados: mirar, girar, caminar, etcétera.
37. Describe y reconoce situaciones de un objeto respecto de otro: delante/detrás de, a la derecha/izquierda de, encima/debajo de.

2º Primaria

Orientación espacial. Situación en el plano y en el espacio.
31. Reconoce de un objeto, cuando las hay, su parte de delante/detrás, de arriba/abajo, de la derecha/izquierda.
32. Describe y dibuja recorridos de caminos sobre una red cuadriculada, utilizando de forma combinada las direcciones: arriba, abajo, derecha e izquierda.
33. Indica con precisión (subir/bajar, girar a la derecha/izquierda...) la forma de llegar de un lugar a otro en las dependencias escolares.
Rectas paralelas y perpendiculares. Elementos de un polígono. Construcción de triángulos y rectángulos.
34. Clasifica las líneas en rectas, curvas, mixtas y poligonales y busca ejemplos en objetos del entorno.
35. Asocia el concepto de punto con la intersección de dos líneas o con una posición en el plano.
36. Reconoce, entre una serie de figuras, las que son polígonos y los nombra según su número de lados.
37. Utiliza con propiedad los conceptos de lado y vértice en un polígono e identifica el número de lados y vértices de un polígono dado.

3º Primaria

Orientación espacial. Sistema de coordenadas cartesianas.

48. Describe recorridos representados sobre una cuadrícula, precisando direcciones, sentidos y distancias.
49. Localiza puntos y cuadraditos sobre cuadrícula con una referencia ortonormal, utilizando coordenadas cartesianas.
Ángulos y su clasificación. Construcción de triángulos y cuadriláteros.
50. Identifica y define ángulo recto y grado, y clasifica los ángulos en agudos rectos, obtusos, llanos, mayores de 180° y completos.
51. Relaciona el concepto de ángulo con el de giro.
52. Utiliza transportador y regla para medir y reproducir un ángulo dado.
53. Distingue las posiciones relativas de rectas en el plano: paralelas y secantes (perpendiculares y oblicuas).
54. Reconoce, describe, nombra y reproduce (con regla y escuadra o a mano alzada) figuras geométricas: cuadrado, rectángulo, rombo, trapecio y triángulos equiláteros, rectángulos e isósceles.

Completad la siguiente rúbrica que se utilizará para la corrección de la primera parte de la actividad.

Tabla 34 Primera rúbrica del problema 4

	SÍ	NO
¿Es necesario utilizar el applet para la resolución?		
¿El lenguaje es adecuado?		
¿Está en consonancia con el nivel del curso elegido?		
¿Se corresponde con los contenidos del currículo del curso que han sido subrayados?		

Elaborad un árbol del problema para el “desafío planteado”. (Se entrega en papel).

Completad la siguiente rúbrica que se utilizará para la corrección de la segunda parte de la actividad.

Tabla 35 Segunda rúbrica del problema 4

	SÍ	NO
¿Representa un proceso lógico para la resolución del problema planteado?		
¿Tiene en cuenta tanto las respuestas correctas como las incorrectas?		
¿Para las respuestas incorrectas, incluye preguntas o comentarios para redirigir el proceso de resolución?		
¿Para las correctas, incluye preguntas de ampliación?		
¿Está abierto a la posibilidad de crear nuevas ramas en distintas intervenciones?		

El applet al que enlaza el enunciado de la actividad es el siguiente:

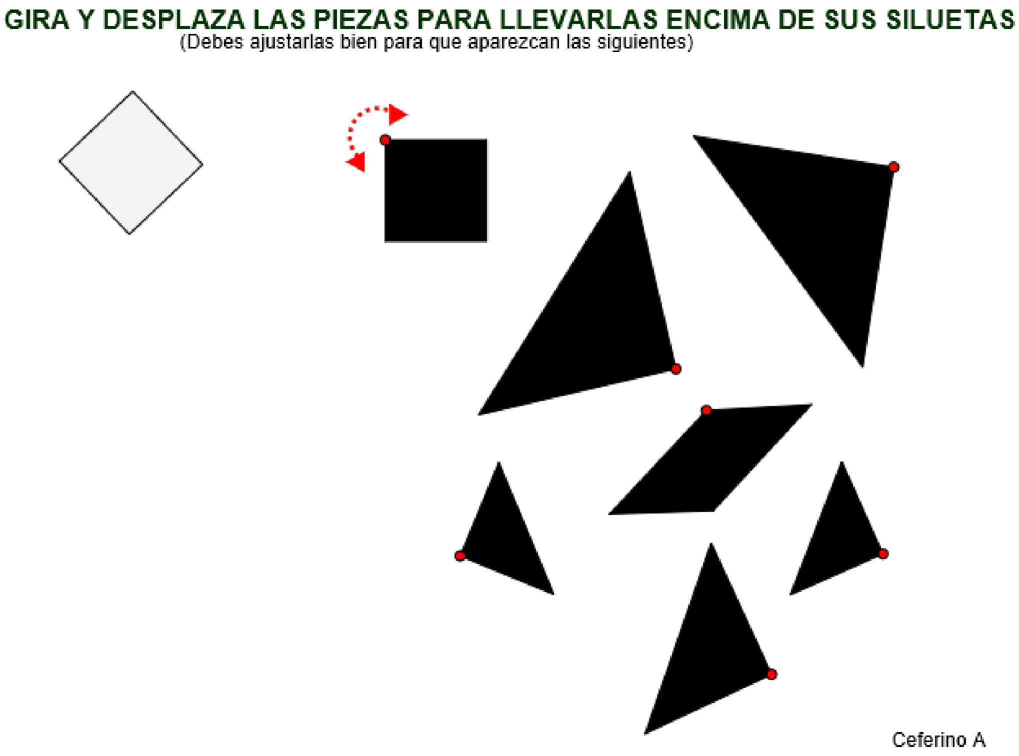


Figura 55 Applet sobre giros y traslaciones

El problema 4 tiene unas características muy diferentes a los anteriores ya que sus objetivos no son matemáticos sino didácticos. En este caso, no se pide que los alumnos busquen una solución utilizando el SGD. Consta de tres partes diferencias:

- Elaboración una actividad geométrica para Educación Primaria, identificando los contenidos y los estándares de aprendizaje evaluables relacionados, presentes en el currículo de Educación Primaria de la Comunidad de Madrid (Decreto 89/2014 de 24 de julio, 25 de julio, 2014). Se presenta a través del Campus Virtual en formato Word.
- Anticipación la resolución de la actividad que han planteado, mediante la creación de un “árbol del problema”. Esta parte se presenta en papel después de la sesión en el aula de informática. La profesora escanea todos y los guarda en formato pdf para poder proyectar algunos durante la discusión en gran grupo.
- Autoevaluación del propio diseño de la actividad y del árbol del problema mediante rúbricas.

En esta ocasión se muestran dos soluciones diferentes. La primera persona que presenta su trabajo en la PDI es María que ha sido la única que ha trabajado sin pareja en todas las sesiones del taller de GeoGebra debido a que el número de alumnos de la clase es impar.

En la siguiente tabla se representa la clasificación de los seis episodios en los que se ha segmentado el problema 3. A continuación, realizamos una descripción global para dar sentido a la representación de los episodios.

Tabla 36 Estructura del problema 4

DISCUSIÓN EN GRAN GRUPO	Situación del problema	Presentación de una solución (argumentada)	Estudio de las estrategias para resolver o argumentar	Estudio de casos particulares o extremos	Contraste entre diferentes soluciones	Conexiones con otras situaciones	Generalización y conceptualización	Reflexión sobre el progreso matemático	*(Tipos de estadio)*
Demostración técnica									
Explicación de la pantalla	e_1						e_6	e_6	
Conexión pantalla-pizarra									
Discusión de la pantalla									
Descubrir y mostrar		e_2,e_4	e_5	e_3	e_5				
Trabajo del Sherpa									
(Tipos de orquestación)									

Según los tipos de orquestación, los episodios se han clasificado en dos: Explicación en la pantalla (cuando se lleva a cabo por la profesora) y descubrir y mostrar (cuando es un alumno quien explica su razonamiento a través de la identificación del trabajo realizado). Esto es debido a que no se ha considerado que la discusión en gran grupo del problema 4 se haya desarrollado en un entorno tecnológico ya que no utilizan SGD para resolver la actividad. Aunque diseñan la actividad geométrica en base a un applet de GeoGebra.

Para comenzar (e_1), la profesora sitúa el problema recordando lo que se pedía. También en este episodio invita a la primera persona a participar desde la pizarra. A continuación, María comienza a explicar una solución de manera argumentada (e_2). En este segmento expone el enunciado que ha redactado, su relación con los estándares y el razonamiento que ha empleado para completar la rúbrica de evaluación. Por su parte, Fernando realizará esta exposición en el episodio 4 (e_4). Ambos episodios se sitúan en el mismo tipo de estadio según la clasificación de Morera (2013).

En el episodio 3 (e_3) se expone un caso particular de árbol del problema, asociado al problema expuesto en el e_2. Este árbol se contrasta con otro en el episodio 5 (e_5), conectado al enunciado expuesto en e_4.

En el último episodio (e_6), la profesora lleva a cabo la generalización y conceptualización. Además, para finalizar provoca una reflexión sobre el progreso matemático. Los alumnos reflexionan de manera personal sobre distintos aspectos del desarrollo del taller y plasman esta reflexión en papel.

Tras este resumen podemos fijarnos en el conjunto de los episodios como una sucesión de acciones que tiene un significado global. En este caso se han identificado un total de 12 oportunidades de aprendizaje que resumimos a continuación, clasificadas según su naturaleza:

Oportunidades orientadas a diferentes estrategias

1. *Aprender diferentes estrategias para identificar si una actividad evalúa un estándar de aprendizaje.*

Oportunidades de autorregulación

2. *Aprender la importancia de plantear dudas*

3. *Recordar la necesidad de expresarse en un lenguaje matemático adecuado*
4. *Aprender la importancia de la auto-corrección*
5. *Aprender la importancia de realizar una generalización y una reflexión.*

Oportunidades orientadas a contenidos didácticos específicos

6. *Aprender a identificar si una actividad evalúa un determinado estándar de aprendizaje*
7. *Aprender cómo diseñar una actividad que evalúe un determinado estándar de aprendizaje*
8. *Recordar qué es el "árbol del problema".*
9. *Conocer que todas las ramas del árbol deben llevar a la resolución del problema.*
10. *Aprender a realizar una validación de un árbol del problema, utilizando una rúbrica.*
11. *Recordar las características del árbol del problema.*
12. *Recordar los estadios de una discusión en gran grupo.*

Por las características intrínsecas al problema planteado, en esta ocasión no se han detectado oportunidades de aprendizaje matemático. La mayoría de las oportunidades se han clasificado como oportunidades orientadas a contenidos didácticos específicos. Algunas de ellas, se repiten en dos ocasiones: *6. Aprender a identificar si una actividad evalúa un determinado estándar de aprendizaje, 7. Aprender cómo diseñar una actividad que evalúe un determinado estándar de aprendizaje, 9. Conocer que todas las ramas del árbol deben llevar a la resolución del problema, 10. Aprender a realizar una validación de un árbol del problema, utilizando una rúbrica.*

El entorno colaborativo ha sido esencial para la gestión del problema. La mayoría de las oportunidades de aprendizaje han surgido como fruto de la discusión conjunta.

6.2. Análisis del progreso matemático

Puesto que la secuencia didáctica tiene lugar dentro del contexto de la asignatura Matemáticas y su Didáctica III, se ha elegido para evidenciar la adquisición de aprendizaje matemático por parte de los alumnos utilizar algunas de las técnicas de evaluación propuestas en la propia guía docente de la asignatura. Estas técnicas son: Caso práctico de aplicación de contenidos y examen final. En el apartado 3.6.4 se muestran los enunciados de ambas. Sin embargo, no todas las oportunidades pueden ser evidenciadas. Seleccionamos oportunidades que se han detectado en repetidas ocasiones en las discusiones analizadas y cuyo aprendizaje puede ser evidenciado en las actividades de evaluación.

Oportunidades de aprendizaje

Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos

- *Revisar la noción de sentido del giro,* que se ha detectado tres veces (una vez en el problema 1, dos veces en el problema 3)
- *Repaso de los elementos que definen a un vector,* que se ha detectado cuatro veces (en el problema 1, en el problema 2 y dos veces en el problema 3)
- *Revisar la noción de simetría* (en el problema 1 y en el 2 en dos ocasiones)
- *Recordar qué es la mediatriz* (problema 2)
- *Aprender que el eje de simetría coincide con la mediatriz de dos puntos homólogos cualquiera.* (problema 2)
- *Aprender que la composición de giro y traslación genera un giro* (en el *problema 3 en dos ocasiones)*
- *Recordar las características de traslación, giro y simetría.* (problema 3)
- *Revisar la noción de traslación* (problema 2)
- *Aprender procedimientos generales y particulares para encontrar el centro de giro.* (problema 1)
- *Recordar un procedimiento general para encontrar el centro de giro.* (problema 3)

Oportunidades orientadas a diferentes estrategias

- *Aprender la necesidad de justificar mediante argumentos matemáticos* (problema 2)
- *Aprender a argumentar matemáticamente.* (problema 3)
- *Aprender a argumentar utilizando procedimientos matemáticos y geométricos* (problema 3)
- *Aprender diferentes estrategias para identificar si una actividad evalúa un estándar de aprendizaje.* (problema 4)
- *Aprender a argumentar empíricamente utilizando el arrastre* (dos veces en el problema 1, tres veces en el problema 2 y una vez en problema 3)
- *Recordar la importancia de argumentar empíricamente y la posibilidad de hacerlo utilizando el carácter dinámico del SGD* (problema 2).
- *Aprender que la construcción de un polígono auxiliar sobre el que se pueda aplicar el dinamismo de GeoGebra ayuda a recordar las características de los distintos movimientos rígidos y es posible extrapolar el razonamiento a un entorno no dinámico.* (problema 3)
- *Aprender a argumentar empíricamente utilizando los medios técnicos.* (dos veces en el problema 3)

Oportunidades de autorregulación

- *Aprender la necesidad de expresarse en un lenguaje matemático adecuado* (tres veces en el problema 1, dos veces en el problema 2, dos veces en el problema 3, una vez en el problema 4)

Oportunidades orientadas a contenidos didácticos específicos

- *Aprender a identificar si una actividad evalúa un determinado estándar de aprendizaje* (dos veces en el problema 4)
- *Aprender qué es el árbol del problema y para qué se utiliza* (problema 1)
- *Recordar qué es el árbol del problema y para qué se utiliza* (problema 3)
- *Recordar qué es el "árbol del problema".* (problema 4)
- *Recordar las características del árbol del problema.* (problema 4)

- *Conocer que todas las ramas del árbol deben llevar a la resolución del problema.* (dos veces en el problema 4)
  Aprender a realizar una validación de un árbol del problema, utilizando una rúbrica. (dos veces en el problema 4)

En primer lugar, analizaremos las respuestas del caso práctico que realizaron 20 alumnos. Recordamos aquí los enunciados de la parte test.

1.1 ¿Cuál es el ángulo de giro?

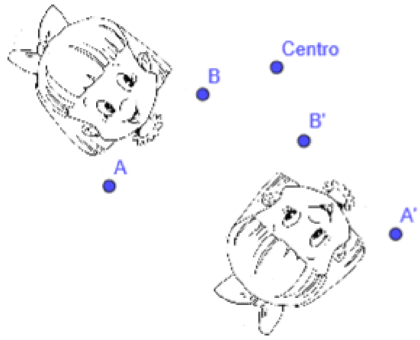


Figura 56 Ejemplo de giro

a) 270º
b) 90º
c) Depende de en qué sentido lo miremos.
d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

1.2 Fíjate en la imagen y selecciona la opción correcta.

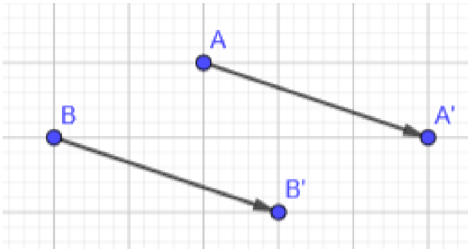


Figura 57 Vectores

a) A ambos puntos se les ha aplicado una traslación, pero de vectores distintos, aunque son paralelos.
b) No se ha aplicado ningún movimiento rígido en el plano porque las distancias cambian.
c) Se han trasladado A y B según el mismo vector.
d) El movimiento de la imagen invierte la orientación.

Las respuestas obtenidas para 1.1 se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 37 Respuestas de los alumnos a la pregunta tipo test 1.1.

	posibles respuestas				
pregunta 1.1	**a**	**b**	**c**	**d**	**sin responder**
nº de respuestas	0	5	14	0	1

Responden correctamente el 70% de los alumnos. Mientras que el 25% no ha sido consciente de que el ángulo de giro puede considerarse en sentido horario y antihorario, fijándose únicamente en el sentido antihorario. Un alumno, que representa el 5% de los evaluados con esta actividad, no responde a esta pregunta.

En el episodio 1 del primer problema surge la oportunidad *Revisar la noción de sentido de giro*. Las alumnas que exponen su solución en la pizarra indican que han aplicado a una figura un giro de 90º. Una alumna desde el sitio dice que su pareja ha escrito que el giro es de 270º. La profesora concluye que la amplitud de giro se puede expresar en sentido horario y antihorario.

Para mostrar un ejemplo de aprovechamiento de la oportunidad de aprendizaje, a continuación, mostramos el cuadro de texto que Cristina y Radhika escribieron en la solución del problema 1.

Cabeza: Giro de 90º con respecto al punto M.
Cuerpo: Simetría axial con respecto a la recta (K-L)
Pierna izda.: Simetría deslizante. Simetría axial (con respecto a la recta P-Q)+ traslación (con repecto al vector (T-U)
Pierna derecha: Traslación con respecto al vector (R-S)

Figura 58 Ejemplo de cuadro de texto en la solución del problema 1

Si nos fijamos en las respuestas que estas dos alumnas escribieron en la pregunta 1.1, Cristina responde correctamente, aunque no representa ninguna argumentación, mientras que su compañera Radhika realiza la siguiente argumentación.

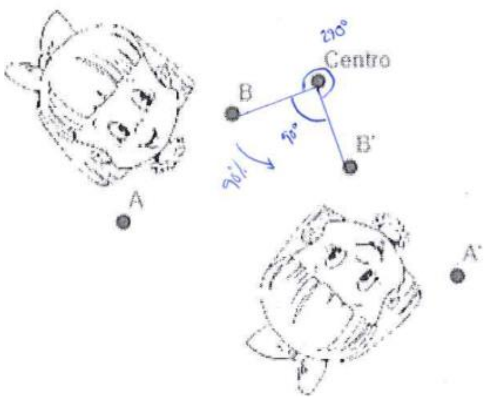


Figura 59 Argumentación para resolver 1.1.

Concluimos que en el caso de estas dos personas se ha producido un aprendizaje matemático fruto del aprovechamiento de una oportunidad de aprendizaje que ha tenido lugar en la discusión en gran grupo. Todas las parejas escribieron el ángulo de giro en un único sentido cuando presentaron su documento ggb. Así, aparentemente se ha producido un progreso en la mayoría de los alumnos.

Durante el desarrollo del problema 3 se recuerda este contenido matemático en dos ocasiones. La repetición ha podido favorecer que la oportunidad haya generado aprendizaje.

Las respuestas obtenidas para 1.2. se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 38 Respuestas de los alumnos a la pregunta tipo test 1.2.

	posibles respuestas				
pregunta 1.2	**a**	**b**	**c**	**d**	**sin responder**
nº de respuestas	4	0	15	0	1

Los dos vectores representados en la imagen son equipolentes, aunque se utiliza ser el mismo vector o ser iguales porque la profesora no quiere ser excesivamente formalista con el lenguaje matemático.

El mismo alumno que dejó sin responder la anterior, tampoco responde en este caso. El 75% de los alumnos responden correctamente, mientras que un 20% piensan que los vectores son distintos, aunque sean paralelos. A continuación, mostramos ejemplos que consideramos evidencias de progreso matemático en relación con el aprovechamiento de una oportunidad de aprendizaje.

El episodio 5 del problema 1 es el primer momento en el que surge durante la sistemática la oportunidad *Repaso de los elementos que definen a un vector*. Cristina y Radhika habían construido, de manera inconsciente, dos vectores que tienen la misma dirección, módulo y sentido. Utilizando el carácter dinámico del SGD descubren que se trata del mismo vector repetido. Las dos alumnas han respondido correctamente a la pregunta test 1.2.

En la discusión en gran grupo del problema 2, durante el episodio 5, María que previamente había representado un vector que iba desde un punto a su imagen, dibuja otro que va desde otro punto diferente de la figura inicial a la imagen de este punto. La profesora pregunta si los dos vectores que quedan representados son iguales. María asiente. Otra alumna interviene preguntando si los vectores deben colocarse siempre sobre puntos de la figura y puntos de la imagen. La profesora recuerda que se pueden colocar en cualquier lugar del plano y que lo que lo define no es dónde se representen, si no su módulo, dirección y sentido. La alumna que ha formulado la pregunta responde a 1.2. argumentando de la siguiente manera:

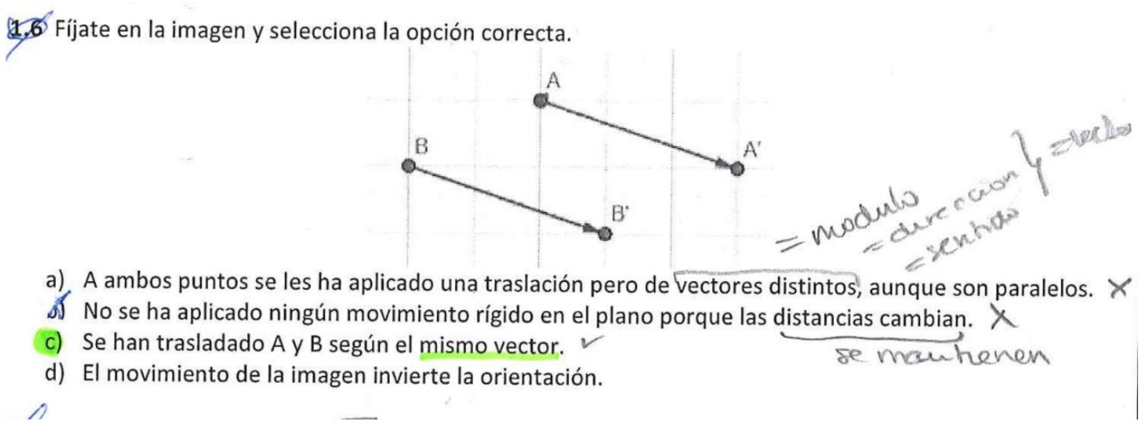


Figura 60 Argumentación para resolver 1.2.

Durante el episodio 3 del problema 3, Cristina afirma que dos vectores le parecen distintos siendo estos dos vectores equipolentes, aunque recordamos que utilizan la palabra “iguales” por no ser excesivamente formalistas con el lenguaje matemático. Una alumna desde el sitio responde que son iguales. La profesora recuerda cuáles son las características del vector y guía para que Cristina y su pareja, Paula, comprueben técnicamente que son dos vectores iguales. En la pregunta test 1.2, Cristina marca la respuesta c, sin escribir ninguna argumentación.

Por su parte, Paula responde que a ambos puntos representados en la imagen se les ha aplicado una traslación pero de vectores distintos, aunque son paralelos (respuesta a). Por la respuesta podemos intuir que en el caso de Paula no se ha producido aprovechamiento de la oportunidad de aprendizaje. Esta alumna forma parte del 20% de la clase que no responde acertadamente. Necesitaríamos más datos para poder analizar los obstáculos o dificultades que han provocado que no se produzca aprendizaje.

Para mostrar el aprovechamiento de otras oportunidades de aprendizaje utilizamos la siguiente pregunta de desarrollo. Observamos que, por una errata, los apartados del ejercicio no están designados por letras en orden alfabético.

Al siguiente cuadrilátero se le ha aplicado un movimiento rígido, como ves en la imagen.

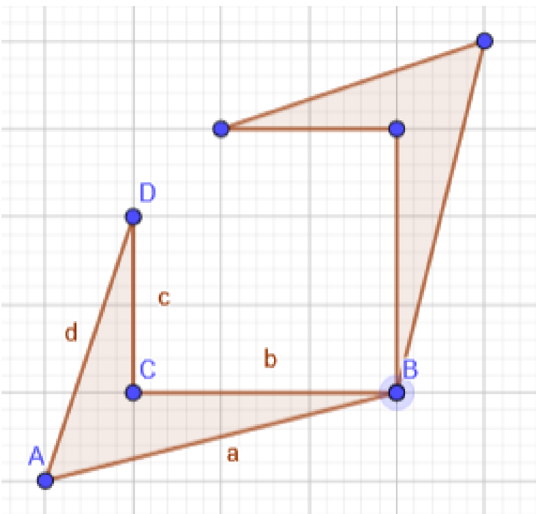


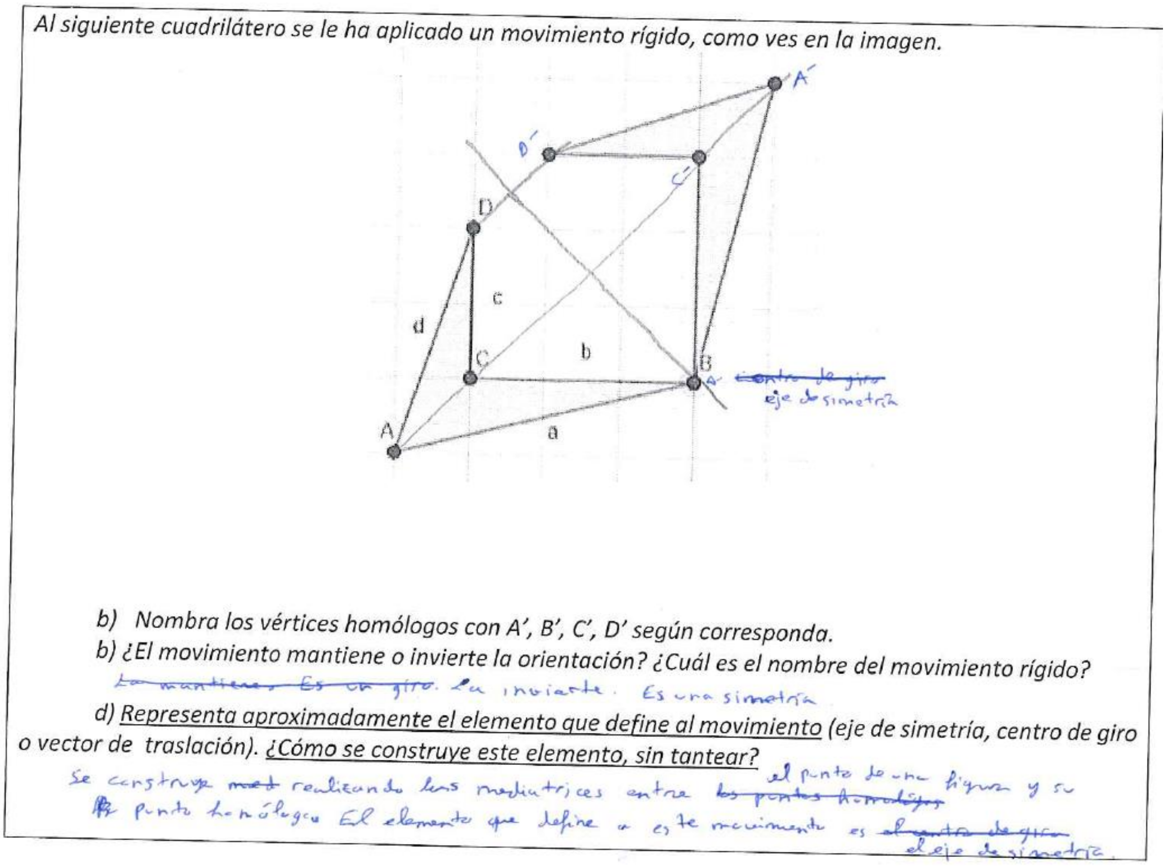
Figura 61 Movimiento rígido aplicado a un cuadrilátero

a) Nombra los vértices homólogos con A’, B’, C’, D’ según corresponda.
b) ¿El movimiento mantiene o invierte la orientación? ¿Cuál es el nombre del movimiento rígido?

d) <u>Representa aproximadamente el elemento que define al movimiento</u> (eje de simetría, centro de giro o vector de traslación). <u>¿Cómo se construye este elemento, sin tantear?</u>

En el episodio 3 del problema 1 recuerdan que el elemento fundamental de una simetría es una recta que llamamos eje de simetría. Las imágenes quedan "enfrentadas", formalmente decimos que "invierte la orientación". Esto se vuelve a recordar en el episodio 2 del problema 2, durante el cual María explica que ella y su pareja (Silvia) han encontrado el eje de simetría utilizando el carácter dinámico del SGD. En el episodio 7 del mismo problema surge la oportunidad de aprender que el eje de simetría coincide con la mediatriz de dos puntos homólogos cualesquiera.

Silvia responde de la siguiente manera a la actividad planteada. Observamos que en primer lugar había relacionado el movimiento con un giro.


Al siguiente cuadrilátero se le ha aplicado un movimiento rígido, como ves en la imagen.

b) Nombra los vértices homólogos con A', B', C', D' según corresponda.

b) ¿El movimiento mantiene o invierte la orientación? ¿Cuál es el nombre del movimiento rígido?

~~La mantiene. Es un giro.~~ La invierte. Es una simetría

d) <u>Representa aproximadamente el elemento que define al movimiento</u> (eje de simetría, centro de giro o vector de traslación). <u>¿Cómo se construye este elemento, sin tantear?</u>

Se construye ~~met~~ realizando las mediatrices entre ~~los puntos homólogos~~ el punto de una figura y su punto homólogo. El elemento que define a este movimiento es ~~el centro de giro~~ el eje de simetría.

Figura 62 Solución de Silvia a la pregunta 2º

Si nos fijamos en la manera de argumentar en el último apartado, podemos concluir que Silvia ha aprendido que el eje de simetría coincide con la mediatriz del segmento que une dos puntos homólogos cualesquiera y se expresa con un lenguaje matemático adecuado. Además, conoce las características de la simetría, identifica los puntos homólogos y se expresa correctamente. Consideramos que hay evidencia de progreso matemático, ya que en la actividad que había realizado antes de la discusión en gran grupo no había utilizado el procedimiento que describe en el apartado d.

A continuación, presentamos la respuesta de María.

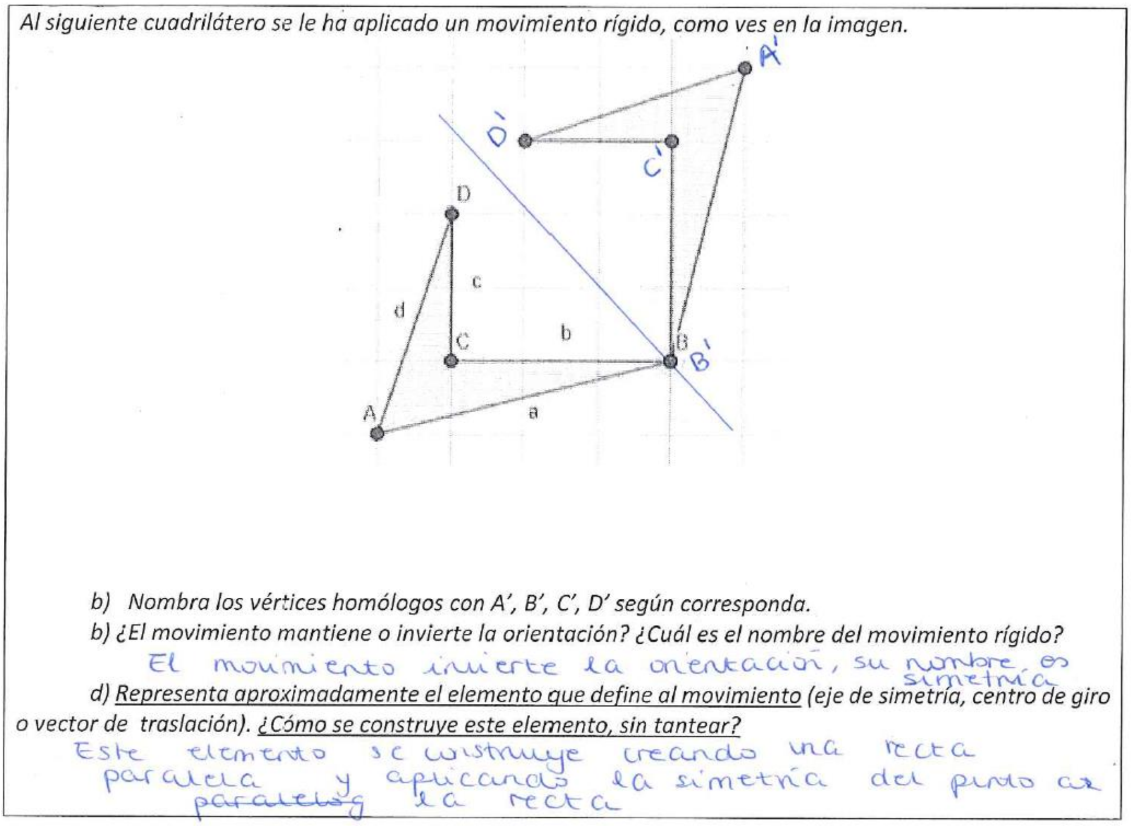


Figura 63 Solución de María a la pregunta 2º

María reconoce que el movimiento es una simetría, identifica los puntos homólogos, el eje y expresa que invierte la orientación. Aparentemente, reconoce las características de la simetría. Sin embargo, la argumentación que escribe en el último apartado no es correcta. Esta alumna que forma parte de una pareja (con Silvia) que no había utilizado un procedimiento matemático para encontrar el eje de simetría y no evidencia que se haya producido un progreso matemático en este aspecto. Aparentemente, consideramos que se trata de dificultades en relación al lenguaje matemático y a la justificación mediante argumentos escritos ya que ha representado correctamente la solución utilizando lápiz y papel en un entorno no dinámico. Es decir, si retomamos la clasificación de tipos de errores que utilizamos en el taller piloto 1 (sección 4.4) se trata de un error de lenguaje relacionado con problemas al utilizar vocabulario matemático y que provoca dificultades en la expresión de las soluciones.

Por su parte, en el examen final se incluyó la siguiente cuestión tipo test relacionada con oportunidades de aprendizaje matemático asociadas a composición de isometrías.

1.3 ¿Qué movimiento surge de la composición de aplicar un giro y después una traslación?

a) Simetría.
b) Giro.
c) Simetría deslizante.
d) Depende de la posición del vector de traslación y del centro de giro.

Las respuestas obtenidas fueron se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 39 Respuestas de los alumnos a la pregunta tipo test 1.3.

	posibles respuestas				
pregunta 1	**a**	**b**	**c**	**d**	**sin responder**
nº de respuestas	0	8	1	9	2

Responden correctamente el 40% de los alumnos, mientras que casi la mitad de los estudiantes opinan que depende de la posición del vector de traslación y del centro de giro. Una única persona señala la opción “simetría deslizante” mientras que dos alumnos no responden.

A pesar de que la oportunidad de *aprender que la composición de giro y traslación genera un giro* surge dos veces durante la resolución del problema 3, no hay evidencias de que haya sido aprovechada por la mayoría de los estudiantes. En los episodios 7 y 12, la profesora es quién enuncia el resultado que había causado confusión por parte de algunas parejas durante la realización de las tareas en el aula de informática. Estas parejas únicamente veían el movimiento de la figura H a la G como composición de giro y traslación (así la figura F sería intermedia). Finalmente, todas las parejas entregaron la actividad respondiendo correctamente al apartado c, reconociendo que el movimiento era un giro.

Nos centramos ahora en el siguiente ejercicio del examen, orientado a contenidos didácticos específicos.

a) Resuelve la siguiente actividad, diseñada para el curso 5º de Primaria.

10 **Los siguienetes dibujos son tarjetas dobladas por su eje de simetria. Une cada una con la tarjeta que aparecerá al desplegarla.**

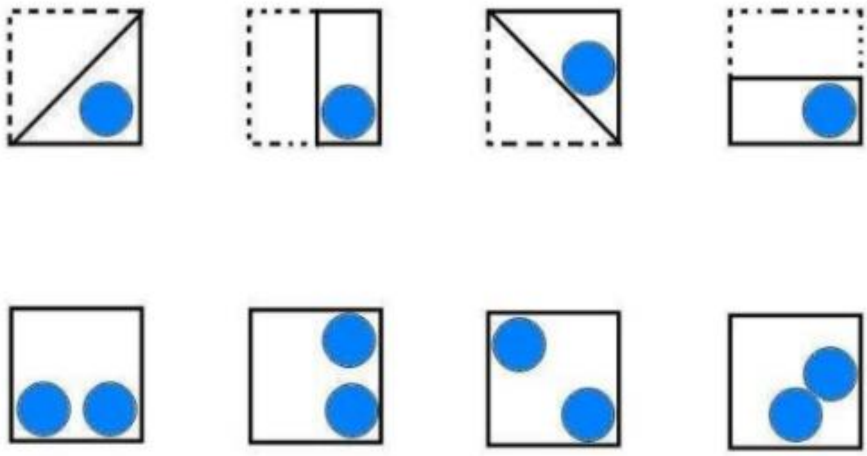


Figura 64 Actividad diseñada para 5º de Primaria

b) En el siguiente extracto del Decreto Currículo de la comunidad de Madrid:
- *Subraya con una línea continua (____) el contenido presente.*
- *Subraya, utilizando puntos (….) los criterios de evaluación presentes.*
- *Subraya, utilizando línea discontinúa (_ _ _) el estándar de aprendizaje evaluable presente.*

Geometría

La situación en el plano y en el espacio. Sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimiento.

52. Interpreta y describe situaciones, mensajes y hechos de la vida cotidiana utilizando el vocabulario geométrico adecuado: indicando una dirección, describiendo un recorrido y orientándose en el espacio.

53. Localiza puntos, dado un sistema de referencia ortonormal, utilizando coordenadas cartesianas y dibuja figuras, dadas las coordenadas de sus puntos más significativos.

54. Dado un plano y la equivalencia entre distancias en el plano y en el terreno representado.

55. Calcula distancias reales entre puntos del plano.

56. Sitúa puntos con el compás a una distancia determinada de otro o de otros dos puntos dados.

57. Sitúa puntos con el compás a la misma distancia de otros dos.

Ángulos en distintas posiciones. Exploración de figuras geométricas. Clasificación de triángulos y de cuadriláteros.

58. Identifica y representa ángulos en distintas posiciones: consecutivos, adyacentes, opuestos por el vértice, complementarios, suplementarios, etcétera.

59. Utiliza instrumentos de dibujo y herramientas tecnológicas para la construcción y exploración de formas geométricas.

60. Descubre y enuncia cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo y de un cuadrilátero.

61. Identifica y traza las tres alturas de un triángulo dado.

62. Clasifica los triángulos, atendiendo a sus lados y a sus ángulos.

63. Clasifica los cuadriláteros atendiendo al paralelismo entre sus lados y a sus ángulos.

Simetrías. Trazado de figuras simétricas.

64. Descubre simetrías especulares en figuras sencillas y familiares.

65. Dibuja, dada una figura sencilla en una cuadrícula, la figura simétrica cuando el eje de simetría es horizontal o vertical.

Posiciones relativas de rectas y circunferencias. Cuerpos redondos.

66. Identifica y representa diferentes posiciones relativas de rectas y circunferencias.

67. Conoce y nombra los elementos básicos de los cuerpos redondos: cono, cilindro y esfera.

Cálculo de perímetros y áreas.

68. Calcula perímetros y áreas a partir de croquis previamente dibujados por los alumnos.

69. Conoce las fórmulas del área del triángulo y del paralelogramo y es capaz de aplicarlas, midiendo o usando dimensiones dadas.

70. Calcula y aplica las fórmulas del perímetro de la circunferencia y del área del círculo.

c) *Elabora un árbol del problema para guiar la resolución de la actividad.*
(El apartado c se corregirá utilizando la rúbrica que teníamos en la "Actividad 4 del taller de GeoGebra". Si la respuesta a la primera pregunta es NO, la puntuación de este apartado será 0. El resto de apartados tienen un valor de 0,25)

Todos los alumnos han respondido correctamente al apartado a) que era un ejercicio diseñado para 5º de Educación Primaria, no para estudiantes del Grado Magisterio de Educación Primaria. Por otro lado, debían responder al apartado b) señalando los contenidos, criterios y estándares presentes en la actividad del apartado anterior. Sin embargo, una alumna entendió que debía señalar todos los presentes estuvieran o no relacionados con el apartado a).

Este apartado se considera respondido correctamente si subrayan lo siguiente:

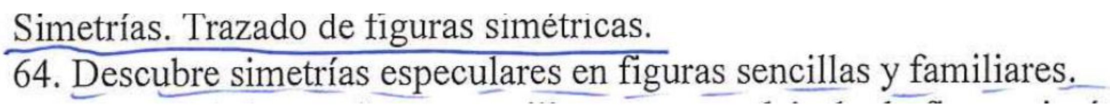

Simetrías. Trazado de figuras simétricas.
64. Descubre simetrías especulares en figuras sencillas y familiares.

Figura 65 Respuesta de María Q al apartado b

Únicamente una alumna, María Q (que interviene en muchas ocasiones durante las discusiones en gran grupo desde el sitio) ha respondido como se esperaba. Ha habido dos alumnos que han señalado lo esperado más el estándar 65 y una alumna que ha señalado el estándar 65 en lugar del 64.

Los errores más comunes que se observan son los siguientes: Subrayar el nombre del bloque (geometría) como si fuera un contenido y subrayar el contenido como si fuera un criterio de evaluación.

No podemos concluir que los alumnos hayan aprendido a identificar qué estándares de aprendizaje son evaluados por una actividad, aunque se ha considerado que las oportunidades de aprendizaje *Aprender diferentes estrategias para identificar si una actividad evalúa un estándar de aprendizaje* y *Aprender a identificar si una actividad evalúa un determinado estándar de aprendizaje* aparecen en el problema 4.

Por su parte, el apartado c hace referencia a la herramienta didáctica "árbol del problema". En el primer problema aparece la oportunidad de aprendizaje *Aprender qué es el árbol del problema y para qué se utiliza.* Surge la oportunidad de recordar esto tanto en el problema 3 como en el 4. Además, en el último problema aparecen en dos ocasiones las siguientes oportunidades: *Conocer que todas las ramas del árbol deben llevar a la resolución del problema* y *Aprender a realizar una validación de un árbol del problema, utilizando una rúbrica.* A esta rúbrica se hace referencia en el propio enunciado del examen.

El 50% de los alumnos representaron un proceso lógico para la resolución, teniendo en cuenta tanto las respuestas correctas como las incorrectas. Todos estos árboles estaban a abiertos a la posibilidad de crear nuevas ramas en distintas intervenciones. Para las respuestas correctas incluyeron preguntas o comentarios para redirigir el proceso de solución. Sin embargo, para las respuestas correctas ninguno de estos alumnos incluyó preguntas de ampliación. El 40% de los alumnos no representaron un proceso lógico para la resolución. Los principales motivos fueron: partir de preguntas demasiado genéricas, no partir de preguntas si no de títulos y la existencia de ramas que no llevaban a la resolución del problema. Hubo dos alumnos que corresponden con el 10% restante que no contestaron a este apartado. No podemos concluir que, en general, se haya producido aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje relacionadas con *aprender qué es el árbol del problema y para qué se utiliza, saber las características del árbol del problema, conocer que todas las ramas del problema deben llevar a la resolución del problema, aprender a realizar una validación del árbol del problema…*

Con el estudio de las respuestas obtenidas en la siguiente actividad, pretendemos detectar si se ha producido un aprovechamiento de la oportunidad de aprendizaje *revisar la noción de traslación* que aparece en el problema 2.

Además, en el problema 3 surge la oportunidad de aprendizaje *recordar las características de traslación, giro y simetría* que consideramos que también guarda relación, ya el ejercicio pide elegir qué utilizar para aplicar un movimiento rígido con unas características determinadas: una recta o un vector.

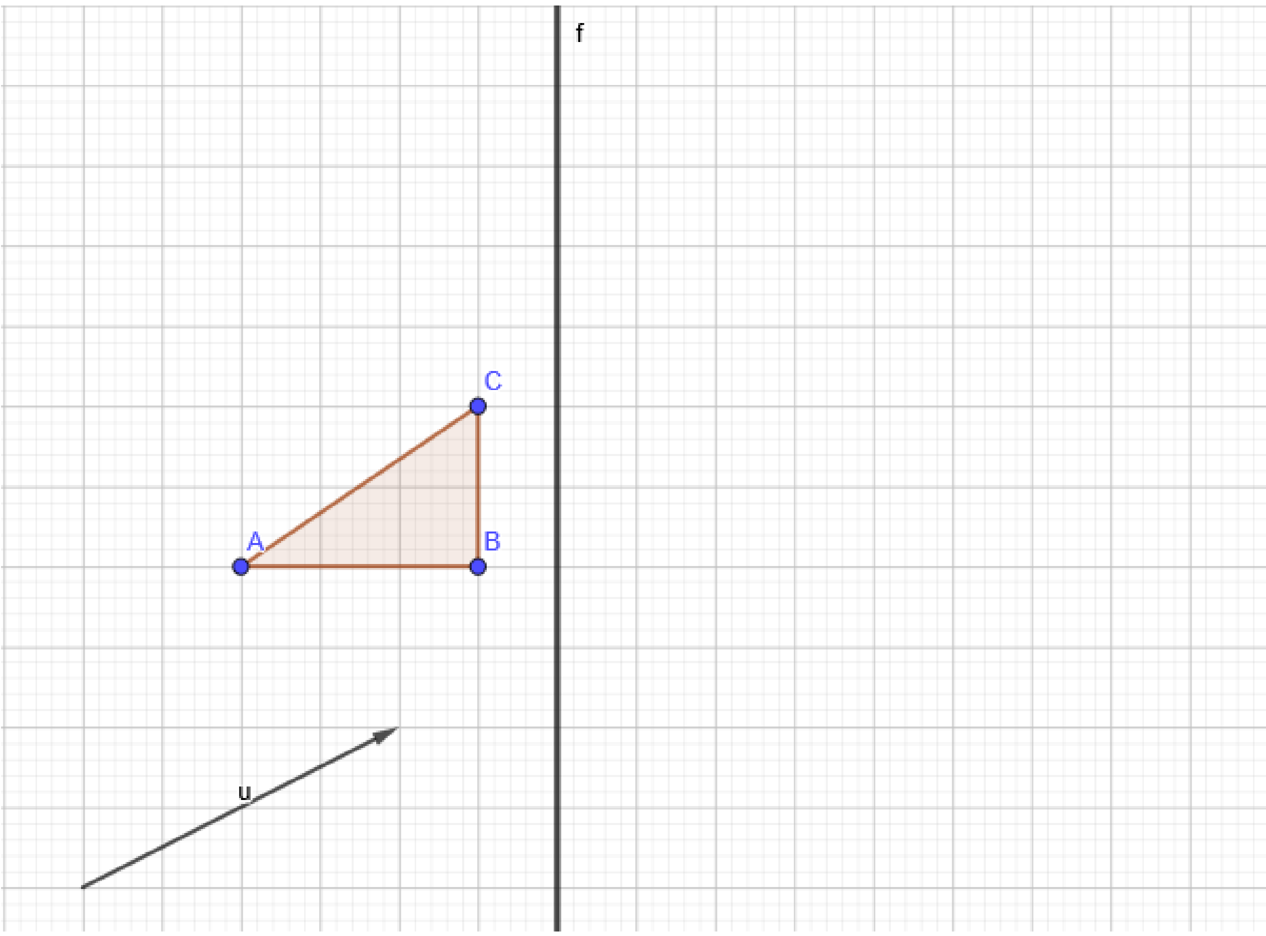


Figura 66 Triángulo, recta y vector

a) *Utilizando uno de los dos elementos que aparecen en la imagen (u o f), aplica al triángulo ABC un movimiento que no deje ningún punto fijo. Indica las imágenes de cada uno de los vértices.*

b) *¿Cómo se llama el movimiento? ¿Mantiene o invierte la orientación?*

La mayoría de los estudiantes han respondido correctamente a esta pregunta del examen escrito. Así, parece que se ha producido un aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje asociadas. Sin embargo, hay cuatro personas que no han respondido correctamente. Desconocemos las causas por las cuales, estas respuestas no coinciden con las esperadas. Tres alumnos han elegido la recta f y han aplicado simetría en lugar de traslación. La respuesta incorrecta de la otra persona ha sido la siguiente:

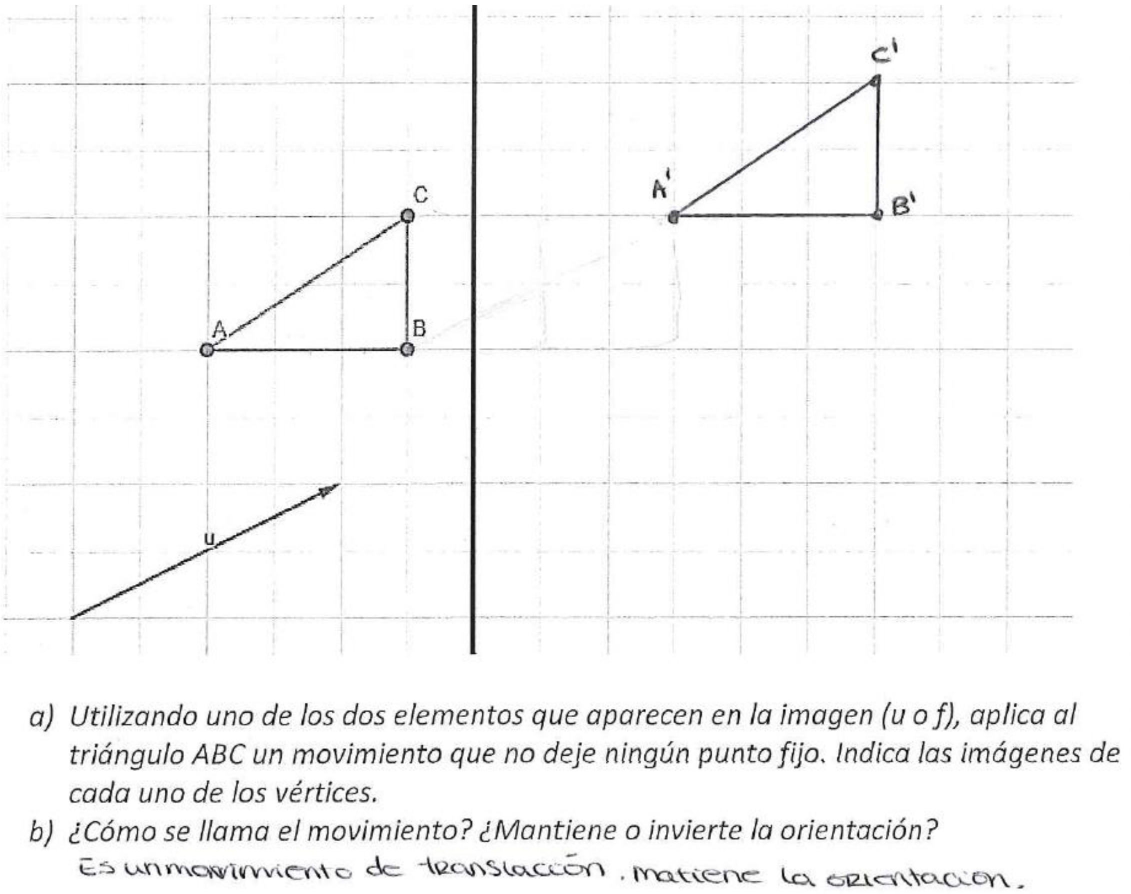


Figura 67 Ejemplo de respuesta incorrecta a 3º

La alumna es consciente de que debe aplicar una traslación de vector u que mantiene la orientación. Sin embargo, sitúa el origen de vector en el vértice B pero en el extremo representa la imagen del vértice A.

Si nos fijamos en la siguiente actividad del examen, en los dos primeros apartados se pide argumentación y explicar el proceso, por ello se evalúan las diferentes estrategias y la adquisición de ciertos aprendizajes relacionados con oportunidades de autorregulación. El último apartado se ha incluido para evaluar si los alumnos han aprendido el valor añadido del dinamismo del SGD frente a la utilización de lápiz y papel.

Al pez marcado con ORIGINAL se le han aplicado diferentes movimientos rígidos, obteniendo el resto.

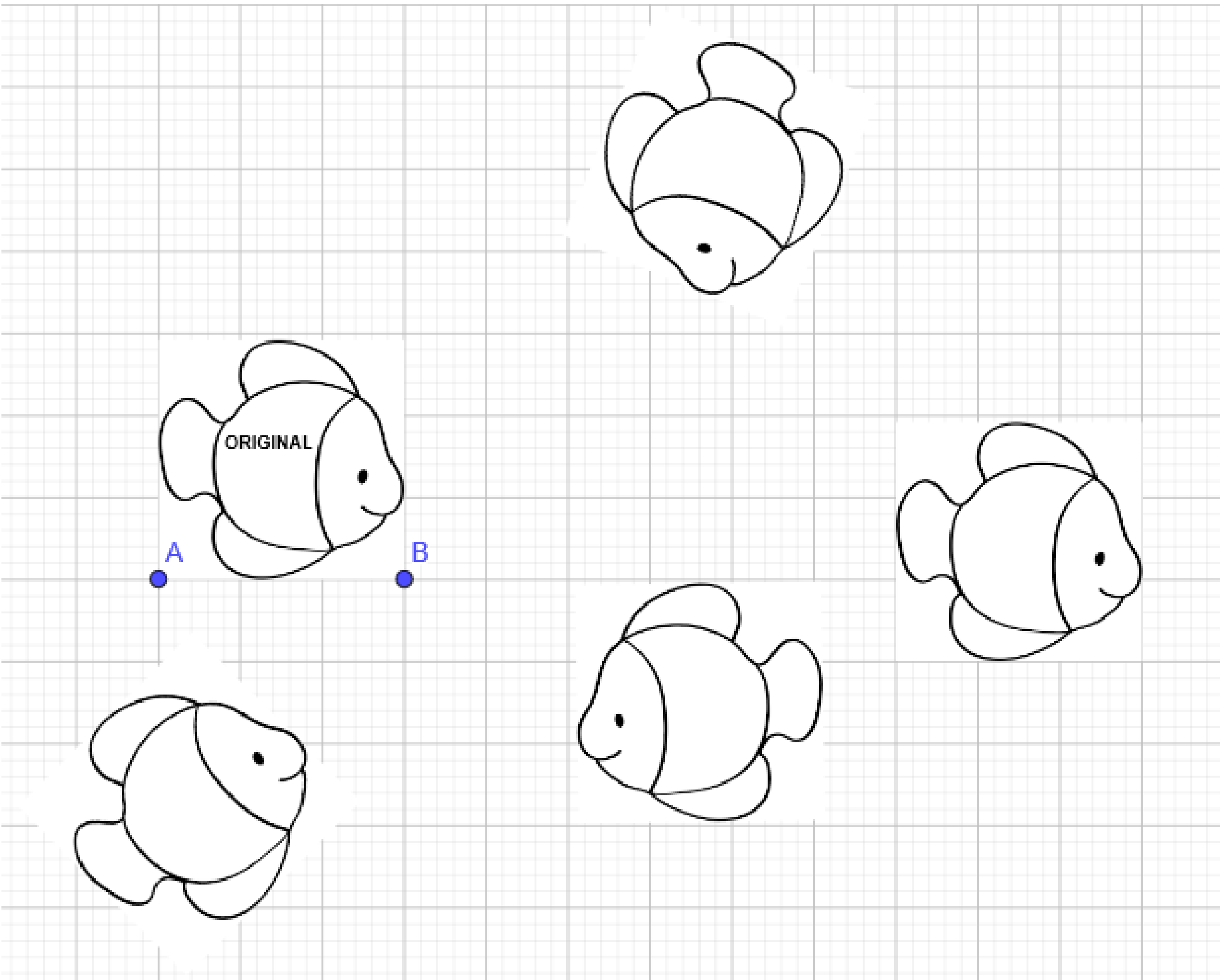


Figura 68 Pez original e imágenes

a) *Señala en la imagen cuál es una simetría, un giro, una traslación y una simetría deslizante. Explica (en otro folio) los motivos en los que te basas para la elección de cada uno de los movimientos.*

b) *Señala, en cada uno de los peces de la imagen, los homólogos de los puntos A y B. Utilizando estos puntos, construye si lo necesitas figuras auxiliares y dibuja: eje de simetría (sólo del pez simétrico, no del simétrico deslizado), centro de giro y vector de traslación (sólo del simétrico, no del simétrico deslizado). Explica (en otro folio) el proceso para encontrar cada uno de estos elementos.*

c) *Responde sinceramente, según tu opinión: ¿Crees que te hubiera resultado más fácil o más difícil resolver esta actividad utilizando GeoGebra? ¿Qué característica(s) de GeoGebra hubiera sido útil?*

En el apartado a se evalúa la capacidad de identificación de los movimientos rígidos en un entorno no dinámico. Además, al pedir argumentación, consideramos que nos puede ayudar a analizar si se ha producido un aprovechamiento de las siguientes oportunidades de aprendizaje:

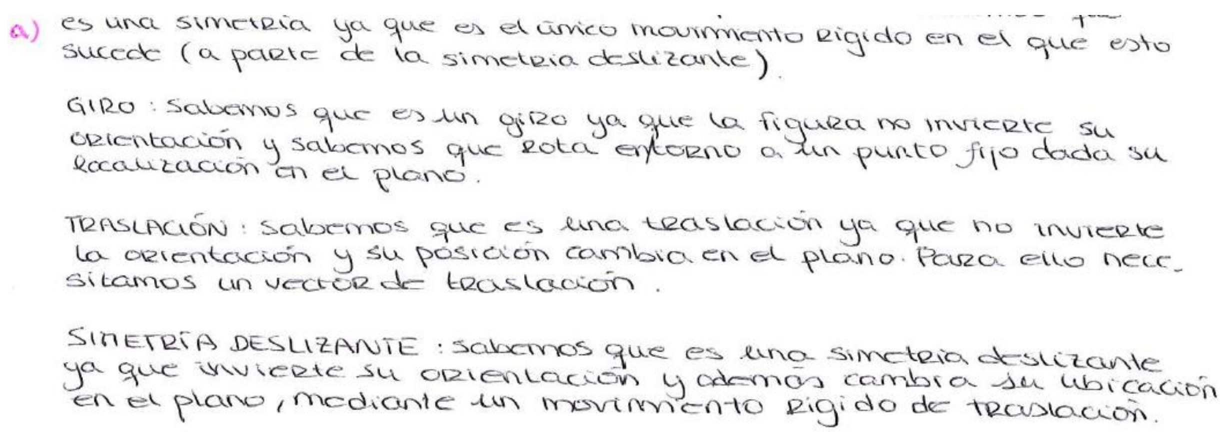
Oportunidades orientadas a diferentes estrategias

- *Aprender la necesidad de justificar mediante argumentos matemáticos* (problema 2)
- *Aprender a argumentar matemáticamente.* (problema 3)
- *Aprender a argumentar utilizando procedimientos matemáticos y geométricos* (problema 3)

Oportunidades de autorregulación

- *Aprender la necesidad de expresarse en un lenguaje matemático adecuado* (tres veces en el problema 1, dos veces en el problema 2, dos veces en el problema 3, una vez en el problema 4)

El problema 3 pedía la identificación de distintas isometrías en un entorno estático. Durante el taller, varias parejas construyeron polígonos auxiliares en estos casos. Una de ellas fue la formada por Patricia (participa desde el sitio en la discusión) y Paula (no participa en la discusión). Ninguna de las dos alumnas necesita construcciones auxiliares para identificar los movimientos en el examen. Además, utilizan argumentos matemáticos y geométricos correctos.



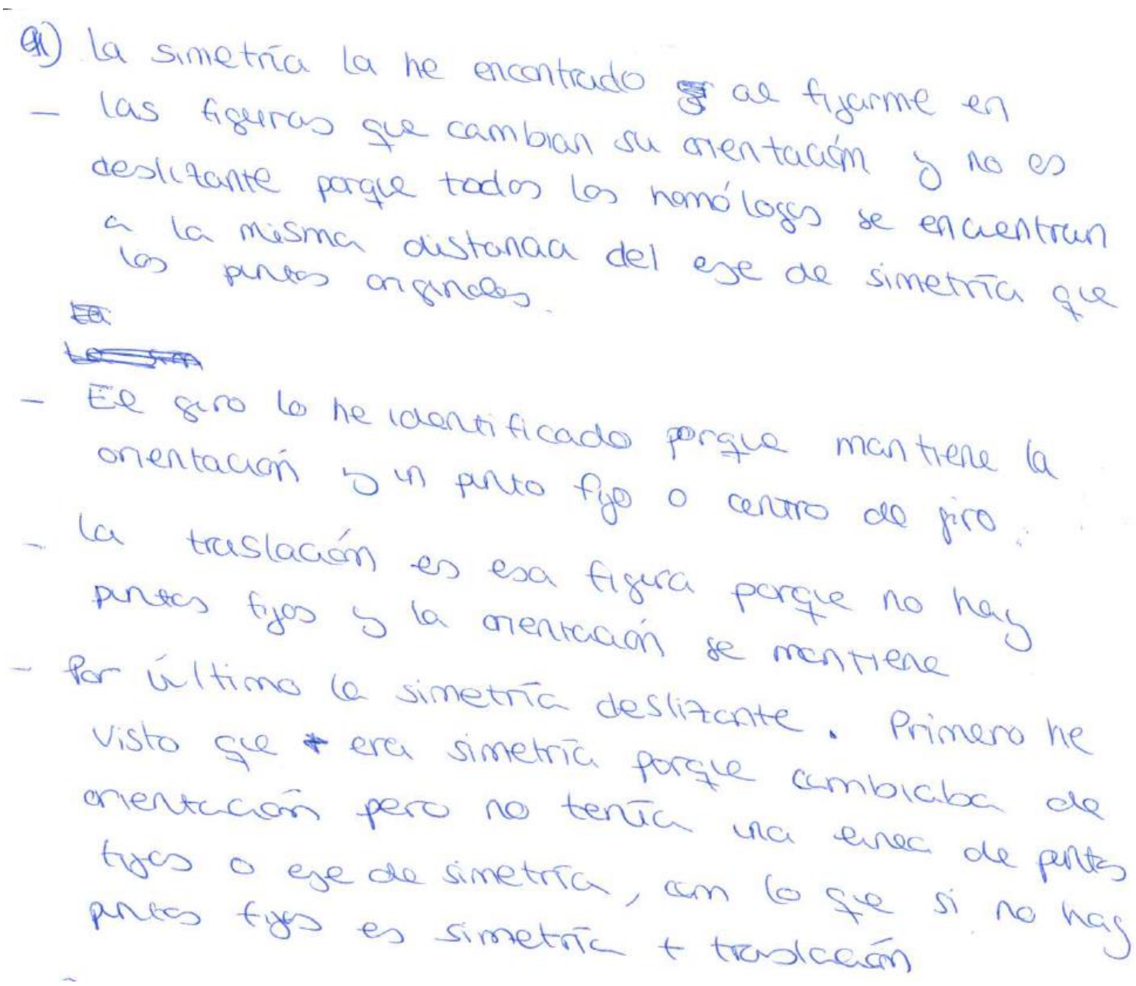
a) es una simetría ya que es el único movimiento rígido en el que esto sucede (a parte de la simetría deslizante).

GIRO: Sabemos que es un giro ya que la figura no invierte su orientación y sabemos que rota entorno a un punto fijo dada su localización en el plano.

TRASLACIÓN: sabemos que es una traslación ya que no invierte la orientación y su posición cambia en el plano. Para ello necesitamos un vector de traslación.

SIMETRÍA DESLIZANTE: sabemos que es una simetría deslizante ya que invierte su orientación y además cambia su ubicación en el plano, mediante un movimiento rígido de traslación.

Figura 69 Argumentación de Patricia

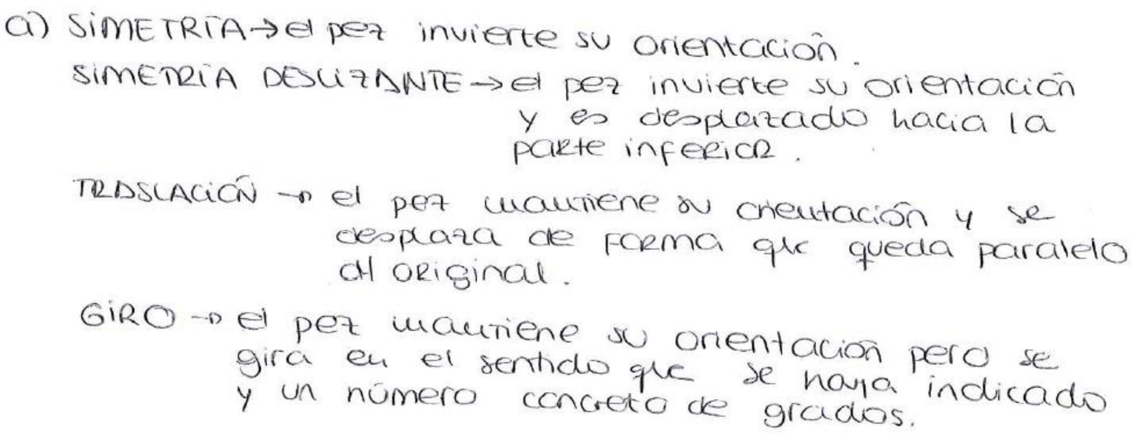


9) la simetría la he encontrado al fijarme en
– las figuras que cambian su orientación y no es
deslizante porque todos los homólogos se encuentran
a la misma distancia del eje de simetría que
los puntos originales.
– El giro lo he identificado porque mantiene la
orientación y un punto fijo o centro de giro.
– la traslación es esa figura porque no hay
puntos fijos y la orientación se mantiene
– Por último la simetría deslizante. Primero he
visto que era simetría porque cambiaba de
orientación pero no tenía una línea de puntos
fijos o eje de simetría, con lo que si no hay
puntos fijos es simetría + traslación

Figura 70 Argumentación de Paula

Otra pareja que había utilizado figuras auxiliares es la formada por Ana y Patricia. Ambas son capaces de identificar cada uno de los elementos en el entorno no dinámico sin utilizar figuras auxiliares. En la figura 71 presentamos la argumentación de Ana. Destacamos que afirma que el pez trasladado se queda “paralelo” al original cuando en ningún momento se había utilizado como argumento para la identificación de una figura trasladada, durante las discusiones en gran grupo.

Cabe destacar que únicamente ha habido dos personas que no han identificado correctamente los cuatro movimientos rígidos. Estas dos personas pertenecen a la misma pareja y han confundido simetría con simetría deslizante. En el problema 3, cuando tienen que identificar isometrías en un entorno no dinámico, no aparecen ninguno de los movimientos que invierten la orientación. Además, esta pareja también había utilizado figuras auxiliares para resolver la actividad durante el taller con el uso del SGD.



a) SIMETRÍA → el pez invierte su orientación.
SIMETRÍA DESLIZANTE → el pez invierte su orientación y es desplazado hacia la parte inferior.
TRASLACIÓN → el pez mantiene su orientación y se desplaza de forma que queda paralelo al original.
GIRO → el pez mantiene su orientación pero se gira en el sentido que se haya indicado y un número concreto de grados.

Figura 71 Argumentación de Ana

En la resolución del apartado b se pone de manifiesto la consecución de las siguientes oportunidades de aprendizaje que aparecieron en la discusión en gran grupo de los problemas 2 y 3: *Aprender que el eje de simetría coincide con la mediatriz de dos puntos homólogos cualquiera, aprender procedimientos generales y particulares para encontrar el centro de giro* y *recordar un procedimiento general para encontrar el centro de giro.*

Resolviendo el problema 2 de la secuencia didáctica, Tamara y su pareja habían encontrado un procedimiento para encontrar el centro de giro en un caso particular pero no el general. Estas alumnas que son sherpas en el episodio 7 de la puesta en común, sí utilizan un procedimiento general en el examen. Ejemplificamos a continuación con la representación y la argumentación realizada por Tamara. Consideramos que hay evidencias de aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje.

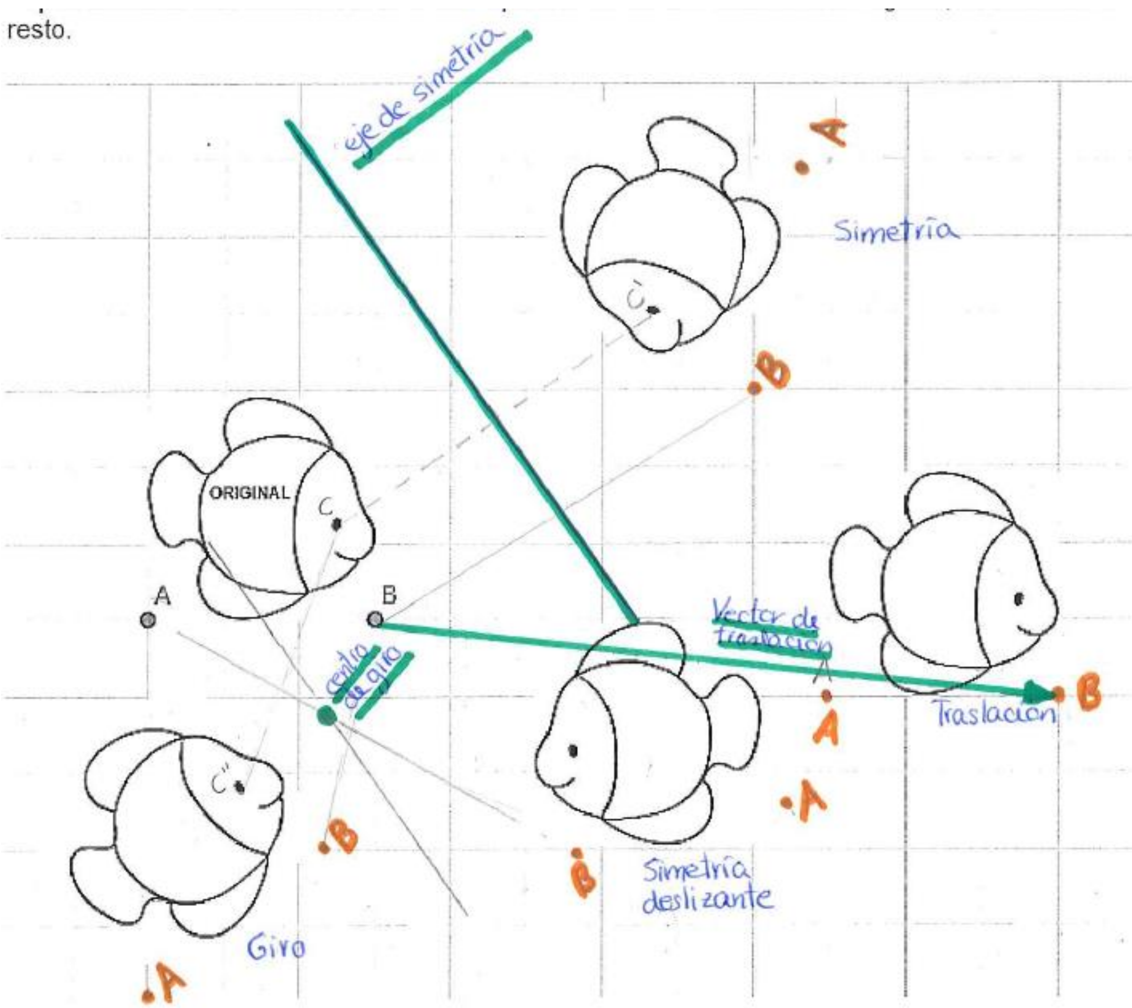


Figura 73 Solución de Tamara a 4º b

Los argumentos escritos de Tamara han sido los siguientes.

b).

- El eje de simetría: lo he hallado, trazando la mediatriz de los puntos homólogos C y C' (los ojos) y comprobando que coincide con las mediatrices del resto de parejas de puntos homólogos (A-A' y B-B').

- El centro de giro: lo he hallado con la intersección de las mediatrices de pares de puntos homólogos.

- El vector de traslación: Trazando un segmento que une los puntos homólogo B y B'.

Figura 74 Argumentos de Tamara

Se esperaba que las respuestas al apartado c sirvieran para conocer si los alumnos han apreciado ventajas a trabajar con el SGD. En concreto, con el análisis de las respuestas obtenidas pretendemos comprobar si han aprovechado las oportunidades de orientadas a diferentes estrategias:

- *Aprender a argumentar empíricamente utilizando el arrastre* (dos veces en el problema 1, tres veces en el problema 2 y una vez en problema 3)
- *Recordar la importancia de argumentar empíricamente y la posibilidad de hacerlo utilizando el carácter dinámico del SGD* (problema 2).
- *Aprender que la construcción de un polígono auxiliar sobre el que se pueda aplicar el dinamismo de GeoGebra ayuda a recordar las características de los distintos movimientos rígidos y es posible extrapolar el razonamiento a un entorno no dinámico.* (problema 3)
- *Aprender a argumentar empíricamente utilizando los medios técnicos.* (dos veces en el problema 3)

Únicamente dos personas han respondido que han preferido resolver esta actividad en papel en lugar de utilizando GeoGebra, aunque reconocen ventajas del SGD. Las respuestas han sido las siguientes:

- *Personalmente a mi me resulta más cómodo hacerlo en papel. Hubiera preferido que la cuadrícula estuviera más definida y tener escuadra y cartabón pero prefiero papel.*

  Aunque evidentemente por sencillez es más sencillo y práctico geogebra ya que es menos sucio y no tienes que preocuparte de las medidas, solamente de introducir bien los condicionantes.

  En geogebra se habría averiguado mucho antes ya que al seleccionar cada pez lo podríamos haber movido por el plano y observar cómo se desplazaba y, según eso, averiguar el movimiento.
- *Personalmente, con el programa geogebra hubiera sido más fácil en algunos aspectos, como para calcular el centro de giro. Pero, yo prefiero hacerlo en papel, ya que me obliga a un razonamiento más completo.*

Observamos que la primera de las respuestas anteriores, aunque afirma que prefiere trabajar en papel, hace referencia al carácter dinámico del software y habla del arrastre, aunque ninguno utiliza esta palabra textualmente. En su caso, utilizaría el arrastre para facilitar la visión de las características que definen a los movimientos. Otras seis personas hablan como ventaja la posibilidad de mover figuras o elementos que definen a movimientos:

- *Creo que GeoGebra habría ayudado muchísimo más, debido a que los trazos se verían mejor, así como los movimientos de prueba que pudiéramos haber hecho para comprobar que estábamos en lo correcto.*
- *Ha sido más difícil. Poder determinar todos los elementos requeridos sin una regla, compás o incluso transportador de ángulos ha sido todo un reto. Además, en GeoGebra puedes intentar mover las figuras tras determinar y aplicar un movimiento rígido, viendo sus efectos en el plano. Realmente ayudaría mucho por su cálculo y hallazgo de simetrías, ejes o mediatrices.*
- *Me hubiera resultado mucho más fácil con geogebra, sobre todo el hallar los elementos que definen cada movimiento (eje de simetría, centro de giro y vector de traslación).*

  Y también, una vez hallados, moverlos y comprobar qué pasa en las figuras.
- *Más fácil y más preciso, ya que muchas cosas no son exactas y no tengo compás para realizar las mediatrices, también moviendo los objetos (centro de giro, eje de simetría… o el original) se ve mejor que movimiento se ha aplicado.*
- *Sí, ya que con geogebra habría podido crear estos movimientos con exactitud y comprobándolo haciéndolo yo.*

  Las características del Geogebra, en definitiva, me habrían permitido comprobar, hacerlo por mí mismo e incluso mover el eje de simetría o el centro de giro o el vector para ver qué resulta.
- *Sí debido a que puedes ir realizando los pasos para comprobarlo pero no sólo eso, ya que puedes desplazar los peces "no originales" y ver cómo actúan ante el movimiento rígido que se le ha aplicado.*

El primer alumno habla de arrastre como herramienta de comprobación de ideas que visualmente perciben previamente a utilizar el dinamismo. Los tres siguientes comparten ideas con el primero y además añaden que consideran que les ha dificultado el desarrollo del ejercicio el hecho de no disponer de herramientas de dibujo, mientras que GeoGebra permite realizar construcciones como mediatrices con gran exactitud (otros dos alumnos hacen referencia a este hecho). El quinto alumno dice que el SGD le hubiera permitido construir él mismo los movimientos y después ajustar moviendo los elementos. En el último caso suponemos que cuando habla de desplazar los peces “no originales” está haciendo referencia al desplazamiento producido por el arrastre de la figura original. No podeos concluir si estas personas han aprendido realmente a argumentar empíricamente utilizando el arrastre, pero parece que valoran el dinamismo de GeoGebra y esto puede conducir a su utilización para argumentar.

Ninguno de los alumnos hace referencia explícita a la construcción de figuras o polígonos auxiliares para extrapolar resultados al entorno no dinámico. Así no podemos concluir tampoco si se ha aprovechado la oportunidad *Aprender que la construcción de un polígono auxiliar sobre el que se pueda aplicar el dinamismo de GeoGebra ayuda a recordar las características de los distintos movimientos rígidos y es posible extrapolar el razonamiento a un entorno no dinámico.*

Capítulo 7. Resultados

En este capítulo analizamos los datos obtenidos en nuestra investigación. En primer lugar, presentamos los resultados de la encuesta realizada a los alumnos al finalizar la aplicación de la sistemática. A continuación, introducimos los resultados sobre la evaluación de la sistemática. Posteriormente, exponemos los resultados obtenidos sobre las oportunidades de aprendizaje detectadas y finalmente, sobre su aprovechamiento.

7.1 Resultados de la encuesta de GeoGebra

Al finalizar el taller, los alumnos completan la misma encuesta que completaron los que asistieron a los dos talleres piloto. Las respuestas obtenidas se resumen en la siguiente tabla. Respondieron a la encuesta 19 alumnos, de los 21 que participan en el taller.

En la siguiente tabla recogemos los resultados de la encuesta y a continuación mostramos el gráfico de frecuencias correspondiente.

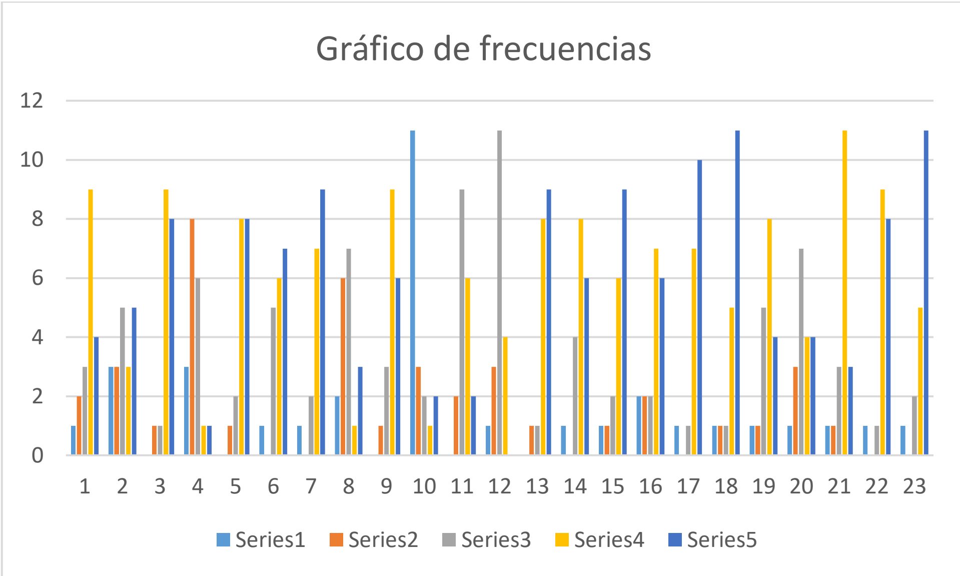
Tabla 40 Resultados de la encuesta

Resultados de la encuesta sobre GeoGebra	
	Frecuencia de cada categoría (grado de acuerdo)

Nº de pregunta	1	2	3	4	5	no responde
1	1	2	3	9	4	
2	3	3	5	3	5	
3		1	1	9	8	
4	3	8	6	1	1	
5		1	2	8	8	
6	1		5	6	7	
7	1		2	7	9	
8	2	6	7	1	3	
9		1	3	9	6	
10	11	3	2	1	2	
11		2	9	6	2	
12	1	3	11	4		
13		1	1	8	9	
14	1		4	8	6	
15	1	1	2	6	9	
16	2	2	2	7	6	
17	1		1	7	10	
18	1	1	1	5	11	
19	1	1	5	8	4	

20	1	3	7	4	4	
21	1	1	3	11	3	
22	1		1	9	8	
23	1		2	5	11	

Figura 75 Diagrama de barras. Resultados de la encuesta



Analizando las entrevistas recogidas, observamos que los estudiantes consideran que la secuencia ha estado suficientemente planificada. Prefieren trabajar en el ordenador en pareja a individualmente y consideran que cuando sus compañeros explican cómo han resuelto una actividad que tiene que ver con la geometría, a veces descubren errores que han cometido.

17 personas de las 19 han marcado un 3 o un 4 a las afirmaciones: *"Afianzo conocimientos cuando explico a los demás cómo he resuelto un problema*" y *"Explicar el proceso que he utilizado para resolver un problema enriquece mi propio aprendizaje*". 14 alumnos han marcado con un 3 o un 4 a la afirmación: "*Cuando estamos en el aula clase y la profesora hace un repaso de lo que hemos construido con GeoGebra, afianzo mis conocimientos".* Lo cual deja en evidencia que, aunque la mayoría cree que se produce un andamiaje de los conocimientos

cuando la profesora repasa, más alumnos opinan que se consolidan cuando son ellos los que explican.

Ningún alumno ha marcado con 4 la afirmación *“Usando GeoGebra resulta difícil tomar la iniciativa para resolver problemas nuevos”,* estando la mayoría de las respuestas situadas en el número 3. Luego, la mayoría no lo consideran ni fácil ni difícil. Además, ningún alumno está en desacuerdo total a la afirmación “*Usar GeoGebra puede ayudar a mejorar mis conocimientos geométricos”.*

Cuatro personas han aportado sugerencias u opiniones.

“A tintes generales, me ha gustado mucho utilizar geogebra y, además, me ha ayudado a ver que es una herramienta muy útil para aprender Geometría en educación primaria. “

“Prefiero trabajar en pareja si cada uno trabaja con su propio ordenador. Se necesitan conocimientos previos del programa y habilidad digital, que no sé en qué medida podrían realizar o poseer los alumnos de primaria.”

“Mejora de las discusiones en gran grupo: Reducir el tiempo de la discusión.”

“Los días en el aula de informática me han resultado muy útiles pero los días de discusión no. Y el árbol del problema tampoco.”

Resulta llamativo que dos de las cuatro personas hagan referencia a la utilidad de GeoGebra para ser aplicado en Educación Primaria con comentarios muy diferenciados, ya que uno apunta a que puede ser muy útil y el otro hace referencia a las dificultades para la instrumentalización.

Los otros dos comentarios son negativos sobre la discusión en gran grupo. A estas dos personas les han parecido largas o poco útiles.

Extraemos las siguientes conclusiones del análisis de la encuesta:

- La secuencia ha estado suficientemente planificada.
- Los alumnos prefieren trabajar en parejas.
- Opinan que ser ellos los que explican les sirve para afianzar conocimientos.

- Consideran que escuchar a los compañeros les produce beneficio.
- Reconocen que escuchar explicaciones de la profesora les sirve para afianzar los conocimientos, en menor medida que explicar ellos.
- Algunos alumnos han destacado que las discusiones en gran grupo les han resultado largas.

7.2 Resultados sobre la evaluación de la sistemática

El primer objetivo de la investigación es *analizar una sistemática de planificación, implementación y evaluación de una secuencia didáctica con discusiones en gran grupo bajo el soporte de GeoGebra.*

En este apartado presentamos una evaluación general del diseño y la implementación de la sistemática, desde el punto de vista de la enseñanza.

Anticipación

Durante la anticipación hemos hecho un amplio estudio de posibles respuestas, tanto correctas como incorrectas. Además, la profesora ha pensado cómo estas posibles respuestas se relacionan con los objetivos de aprendizaje planteados.

El instrumento 'árbol del problema' ha cumplido el objetivo para el que fue pensado por Morera (2013): llevar a cabo la fase de anticipación de una forma sistemática. Al construir cada uno de ellos, la profesora ha realizado todas las acciones que constituyen la esencia necesaria de la anticipación. En cada una de las iteraciones de aplicación de la sistemática se han ido modificando según las necesidades que se detectaban.

Como la investigación se ha llevado a cabo en un entorno tecnológico, en el contenido de los árboles del problema ha puesto atención en las dificultades que podían surgir de la instrumentalización de la herramienta GeoGebra. Así como, la posibilidad de conjeturar cuando se usa el dinamismo del SGD.

Los árboles han sido utilizados en otras fases, además de la anticipación. Tanto las preguntas como los mensajes diseñados para ayudar a la resolución o como ampliación han resultado útiles durante la monitorización y durante las discusiones en gran grupo. Si nos fijamos en el orden de las ramas de los distintos árboles, observamos que la profesora ha tratado de seguir el mismo orden durante las discusiones en gran grupo. Esto seguramente sea debido a que haya materializado su estructura didáctica mental en el diagrama de flujo que describe cada uno de los árboles. Además, esta herramienta ha sido clave para tratar la diversidad, sobre todo, en la monitorización donde cada pareja ha podido avanzar a su ritmo y en ningún momento ha tenido que esperar al resto de participantes.

La adquisición de competencias didácticas es clave en el Grado de Magisterio de Primaria. Por ello, se ha puesto especial hincapié en hacer conscientes a los alumnos del uso de este instrumento en cada uno de los problemas. Además, en el último se pedía la elaboración de un “árbol del problema” que luego evaluaban mediante una rúbrica. Durante la discusión en gran grupo, anclada en los árboles de problemas diseñados por los alumnos, han surgido muchas oportunidades de aprendizaje orientadas a contenido didáctico.

Configuración didáctica

Según Drijvers et al. (2010) la configuración didáctica es el escenario de enseñanza planteado por el profesor y los propios artefactos involucrados. En nuestro caso, el artefacto principal es GeoGebra que será instrumento para el alumno si completa el proceso de génesis instrumental (instrumentalización e instrumentación). Consideramos que hay evidencias para afirmar que la mayoría de los alumnos han completado este proceso. Los árboles del problema ponen especial atención a las dificultades que podían surgir de la instrumentalización y han sido superadas por la mayoría de las parejas.

La configuración didáctica ha sido la misma para cada uno de los cuatro problemas. Lo cual tiene sentido para poder realizar un análisis análogo. Sin embargo, pensamos que se podría plantear como una única configuración general.

Modo de explotación

El modo de explotación es la forma en que el profesor decide implementar la configuración didáctica, incluye decisiones sobre cómo plantear las tareas, el modo de trabajo de los estudiantes, los posibles roles de los artefactos y los esquemas o técnicas que pueden desarrollar los estudiantes (Drijvers et al. 2010).

Para el trabajo de las tareas, en primer lugar, propusimos que se trabajara individualmente. Sin embargo, observamos que no todos los alumnos lo hacían y muchos comenzaban directamente razonando de manera conjunta con su pareja. Durante el trabajo en el ordenador, las parejas conjeturaban y hacían una propuesta de solución. En la siguiente sesión doble, tenía lugar la discusión en gran grupo.

Consideramos fundamental hacer hincapié en la importancia de trabajar brevemente de manera individual para la comprensión de la tarea y la reflexión de sus primeras ideas sobre el problema. Además, proponemos añadir un espacio de reflexión personal después de cada una de las discusiones en gran grupo. En el caso de nuestra sistemática, solamente ha habido espacio explícito de reflexión personal sobre el aprendizaje al finalizar la secuencia. En este momento se pidió una reflexión general sobre los cuatro problemas. Según Morera (2013), la reflexión personal sobre el progreso de uno mismo tras la discusión en gran grupo permite a cada uno hacer su propio proceso de filtraje, y por lo tanto contribuye al proceso de aprendizaje de cada uno de los alumnos.

Por otra parte, la discusión en gran grupo posterior al trabajo en parejas ha sido esencial. En ella se ha podido profundizar en la resolución de los distintos problemas y se ha observado que han surgido oportunidades de aprendizaje y ciertos alumnos han mostrado evidencias de aprovechamiento. Sin embargo, algunos alumnos han expresado que estas discusiones en gran grupo les han parecido largas.

Ha resultado complicado que las discusiones en gran grupo resultaran lo suficientemente dinámicas y no se ha conseguido que todos los alumnos participaran por igual. Por un lado, esto es debido a que estos alumnos no están acostumbrados a trabajar utilizando esta metodología. Por otro lado, las características del propio alumno (timidez, autoconcepto bajo sobre las matemáticas, etc.) han influido en el grado de participación de cada uno. Se propone para futuras implementaciones de la sistemática, la utilización de la metodología ‘discusión en gran grupo’ previamente de manera constante en la misma asignatura o en otras, durante los cursos anteriores o en el mismo curso del Grado.

Monitorización

En esta etapa, la profesora presta atención al pensamiento matemático de los alumnos. Realiza preguntas y lanza sugerencias para conseguir centrar la atención en ciertos aspectos del problema, para clarificar ideas y comprueba si todos los participantes están implicados en la resolución. Basándose en esto y en el análisis de las entregas por parejas realizadas a través del Campus Virtual, en la siguiente fase elige en qué centrarse y quiénes presentarán su solución durante la discusión en gran grupo.

Coincidimos con Morera (2013) al proponer utilizar el árbol del problema como instrumento didáctico para incorporar todos los posibles mensajes, con el objetivo de poder fijar la atención en el pensamiento matemático. Además, es fundamental que las preguntas ayuden a los alumnos a descubrir errores y avanzar en el problema. La utilización de este instrumento ha permitido que cada pareja llevara su propio ritmo y la profesora no debía dedicar mucho tiempo a interpretar en qué punto se encontraba cada una. Sin embargo, no podemos otorgarle todo el mérito al árbol, ya que además hay que darle un uso adecuado, no perdiendo de vista cuál es la función de la orquestación en esta fase.

Selección

Durante esta fase, la profesora ha seleccionado a los alumnos para que muestren su trabajo durante la discusión en gran grupo. En nuestro caso, algunas soluciones seleccionadas eran correctas y otras eran soluciones incompletas. En todos los casos, la discusión se ha desarrollado satisfactoriamente, resultando ricas desde el punto de vista de las oportunidades de aprendizaje encontradas. Por lo tanto, no podemos concluir qué criterio es mejor para llevar a cabo la selección. Creemos que depende de las propias características del problema y de los objetivos que se pretendan alcanzar durante la discusión.

Implementación didáctica y secuenciación

Después de la implementación y el análisis, observamos como Morera (2013) que estas dos fases se entrelazan. Por lo tanto, tiene sentido presentar los resultados de manera conjunta.

Consideramos que, aunque la discusión en gran grupo se prepare en profundidad, siempre hay un elemento de incertidumbre. Coincidimos con Drijvers et al. (2010) que caracterizan la implementación didáctica por su vertiente teórica, en el sentido de que es difícil una preparación concreta.

La profesora ha demostrado conocimiento matemático especializado elevado, lo que ha permitido que haga diagnosis de los procedimientos utilizados por los alumnos en las discusiones, siendo de cualquier tipo. Por ello, pese a la incertidumbre que siempre estará presente en toda discusión, concluimos que es esencial que el profesor de matemáticas tenga el conocimiento especializado que según Carrillo y Díaz (2019) está compuesto por tres dominios: contenido matemático, conocimiento didáctico y creencias.

Conexiones

Después de haber realizado el análisis aplicando el instrumento ‘detector de oportunidades de aprendizaje’, hemos observado que las conexiones están presentes en las discusiones en gran grupo. Unas veces entre las diferentes estrategias para resolver un problema, otras con otros problemas de la secuencia y otras con contenidos matemáticos previos o con contenidos que se deseaban tratar.

Visión conjunta de los resultados de la evaluación de la implementación de la sistemática

Si nos fijamos globalmente en los resultados obtenidos, podemos concluir que el diseño y la implementación de la sistemática han sido exitosos desde el punto de vista de la enseñanza. Aplicando el instrumento TRU-MATH (Schoenfeld, 2013) se ha evidenciado la valoración positiva en la mayoría de los puntos. Esto se ha debido a la utilización de instrumentos de anticipación y a la orquestación. Sin embargo, se han detectado debilidades como la participación que deberían tenerse en cuenta para futuras investigaciones en esta línea. Sería deseable que hubiera existido un trabajo previo por parte de la profesora en algunas técnicas para fomentar la participación de los alumnos que están acostumbrados a una disciplina estricta donde la profesora es la máxima autoridad y a la participación desigual de los estudiantes.

7.3 Resultados sobre las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes

El segundo objetivo de la investigación consiste en *detectar oportunidades de aprendizaje de las isometrías y de contenidos didácticos específicos, así como su aprovechamiento en el contexto de la secuencia didáctica creada a partir de la sistemática.*

La aplicación del instrumento ‘Detector de oportunidades de aprendizaje’ (Morera et al., 2013) nos ha permitido visualizar cómo han actuado la profesora y los alumnos durante las sesiones en las que ha tenido lugar la discusión en gran grupo. Ha servido para detectar las oportunidades de aprendizaje, quedando de manifiesto la eficacia del instrumento. El resultado obtenido ayuda a valorar positivamente la primera parte del segundo objetivo de la investigación.

La fragmentación de cada una de las discusiones en episodios y la posterior clasificación de estos según tipos de orquestación (Drijvers et al., 2010) y estadios de la discusión (Morera, 2013) nos ha permitido ser conscientes de que los estadios no se han desarrollado en orden en ninguno de los casos. Además, hay estadios que se tocan varias veces en un mismo problema. Asimismo, en el desarrollo de algunos de los problemas no se sigue, en ningún momento, alguno de los tipos de orquestación y otros son utilizados en varios episodios. Esto demuestra flexibilidad en la orquestación de la profesora que adapta su guion a las actuaciones de los alumnos.

Al interpretar las acciones de los participantes, observamos que en total hay 31 interpretaciones de acciones posibles que se repiten en varias ocasiones a lo largo de las discusiones en gran grupo:

- aclaración técnica
- ampliación de la argumentación
- asentimiento
- auto-corrección
- búsqueda de alternativas
- complemento de la explicación
- comprobación de una propiedad que se cuestiona
- conexión
- corrección de procedimiento matemático
- corrección del vocabulario matemático
- demostración técnica
- dificultad de comunicación
- establecimiento de consenso
- exposición sin argumentación
- formalización
- invitación a la búsqueda de alternativas
- invitación a la generalización
- invitación a la participación
- justificación empírica
- observación de evidencia empírica
- obstáculo tecnológico
- petición de argumentación
- petición de especificación
- petición de formalización
- petición de solución
- petición indirecta de argumentación
- petición técnica
- recapitulación
- tratamiento de casos particulares
- uso del vocabulario específico
- validación.

Después de la interpretación de las acciones de todos los participantes, hemos detectado oportunidades de aprendizaje relativas a cada episodio. Estas han sido fomentadas por las interacciones de la discusión y por el uso de la tecnología.

Consideramos que las discusiones han sido eficaces porque se han generado en total 59 oportunidades de aprendizaje diferentes, muchas de ellas repetidas en varias ocasiones. En el siguiente apartado exponemos los resultados relativos al aprovechamiento de estas.

Resumimos a continuación todas las oportunidades de aprendizaje detectadas, según la adaptación que hemos hecho de la clasificación de Morera et al., 2013. Indicamos en cada caso en qué problema ha aparecido y el número de veces que se ha detectado en la sistemática. Exponemos, después de cada tabla la relación de las oportunidades de aprendizaje detectadas con las competencias específicas que están recogidas en la guía docente y se exponen en el apartado 4.1.1. del presente trabajo.

Tabla 41 Oportunidades de aprendizaje orientadas a contenidos matemáticos

ORIENTADAS A CONTENIDOS MATEMÁTICOS	PROBLEMAS	Nº DE VECES
Recordar la definición de isometría	3	1
Revisar la noción de simetría	1, 2	3
Revisar la noción de giro	2, 3	4
Revisar la noción de sentido del giro	1, 3	3
Revisar la noción de traslación	2	1
Repasar la noción de modulo	3	2
Repasar la noción dirección	3	2
Repasar la noción de sentido	3	2
Repaso de los elementos que definen a un vector, cuando dos vectores son iguales	1, 2, 3	4
Recordar las características de traslación, giro y simetría	3	1
Revisar la noción de simetría deslizante	1	1
Revisar el vocabulario específico	1	1
Diferenciación de recta y segmento	1	1
Recordar qué es la mediatriz	2	1
Conocer que la composición de movimientos en el plano puede originar traslación, giro, simetría o simetría deslizante	1	1

Aprender que si el eje de simetría es perpendicular al vector de traslación, la composición de simetría y traslación es simetría	**1, 3**	**2**
Aprender que la composición de una simetría y una traslación con vector de traslación perpendicular al eje de simetría es una simetría donde el eje es paralelo al inicial	**1**	**1**
Aprender que la composición de una simetría y una traslación con vector de traslación perpendicular al eje de simetría es una simetría donde el eje se traslada según un vector de módulo la mitad que el inicial	**1**	**1**
Aprender que la composición de simetría y traslación no es conmutativa pero genera un movimiento con el mismo nombre	**1**	**2**
Recordar que la composición de simetría y traslación, de vector no perpendicular al eje de simetría genera una simetría deslizante. Aunque estos movimientos no sean conmutativos, traslación y simetría también generan simetría deslizante	**3**	**1**
Aprender que la composición de giro y traslación genera un giro	**3**	**2**
Aprender que giro y traslación no son movimientos conmutativos pero su composición en un orden u otro genera un nuevo giro	**3**	**1**
Aprender que el eje de simetría coincide con la mediatriz de dos puntos homólogos cualquiera.	**2**	**1**
Aprender procedimientos generales y particulares para encontrar el centro de giro.	**2, 3**	**6**

Las oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos detectadas están estrechamente relacionadas con la adquisición de las siguientes competencias específicas:

- Comprender los principios básicos y fundamentales de las Matemáticas básicas.
- Adquirir competencias matemáticas básicas (geométricas, representaciones espaciales, organización e interpretación de la información).

Tabla 42 Oportunidades de aprendizaje orientadas a diferentes estrategias

ORIENTADAS A DIFERENTES ESTRATEGIAS	PROBLEMAS	Nº DE VECES
Aprender que, a veces, no existe una única solución	**1**	**1**
Aprender a argumentar empíricamente, utilizando el arrastre	**1, 2, 3**	**6**
Aprender a argumentar empíricamente utilizando los medios técnicos.	**3**	**2**
Aprender a argumentar matemática y geométricamente	**3**	**2**
Aprender a recurrir a casos particulares	**1**	
Aprender la necesidad de encontrar la estrategia más corta para resolver un ejercicio	**3**	**2**
Aprender a conjeturar	**2, 3**	**2**
Aprender la importancia de buscar distintas alternativas cuando una estrategia no funciona	**2**	**1**
Aprender que existen varios procesos para resolver un problema	**2**	**1**
Recordar la importancia de argumentar empíricamente y la posibilidad de hacerlo utilizando el carácter dinámico del SGD	**2**	**1**
Aprender la necesidad de justificar mediante argumentos matemáticos	~~**2**~~	~~**1**~~
Aprender la necesidad de encontrar una estrategia general para resolver un ejercicio	**2**	**1**
Aprender que la construcción de un polígono auxiliar sobre el que se pueda aplicar el dinamismo de GeoGebra ayuda a recordar las características de los distintos movimientos rígidos y es posible extrapolar el razonamiento a un entorno no dinámico.	**3**	**1**
Aprender diferentes estrategias para identificar si una actividad evalúa un estándar de aprendizaje.	**4**	**1**

Las oportunidades detectadas orientadas a diferentes estrategias se encuentran estrechamente relacionadas con las siguientes competencias específicas:

- Valorar distintas estrategias metodológicas adecuadas a las diferentes áreas del conocimiento en Matemáticas.
- Analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas.

Cabe destacar que además se relacionan con la siguiente competencia transversal:

- Conocer y utilizar estrategias de comunicación oral y escrita y el uso de las TIC en el desarrollo profesional.

Tabla 43 Oportunidades de aprendizaje orientadas a autorregulación

OPORTUNIDADES DE AUTORREGULACIÓN	PROBLEMAS	Nº DE VECES
Aprender a conjeturar	2	1
Aprender la necesidad de expresarse con el lenguaje matemático adecuado	1, 3, 4	6
Aprender la necesidad de justificar mediante argumentos	1. 3	3
Aprender la necesidad de demostrar las propiedades que se enuncian	1	1
Aprender la importancia de argumentar empíricamente	2	1
Aprender a argumentar empíricamente, utilizando el arrastre	2	4
Aprender la importancia de plantear dudas	1, 4	3
Aprender la importancia de la auto-corrección	4	1
Aprender a auto-corregir la solución	1	1
Aprender que pueden existir varios procesos para resolver un problema	2	1
Aprender la necesidad de encontrar una estrategia general para resolver un ejercicio	2	1
Aprender la importancia de hacer conexiones con otras cuestiones.	3	1
Aprender la importancia de participar en clase	3	1
Aprender la importancia de realizar una generalización y una reflexión.	4	1

Consideramos que estas oportunidades de autorregulación se relacionan con todas las competencias transversales:

- Valorar la importancia del trabajo en equipo y adquirir destrezas para trabajar de manera interdisciplinar dentro y fuera de las organizaciones, desde la planificación, el diseño, la intervención y la evaluación de diferentes programas o cualquier otra intervención que lo precisen.
- Conocer y utilizar estrategias de comunicación oral y escrita y el uso de las TIC en el desarrollo profesional.
- Adquirir un sentido ético de la profesión.
- Conocer y aplicar los modelos de calidad como eje fundamental en desempeño profesional.

- Adquirir la capacidad de trabajo independiente, impulsando la organización y favoreciendo el aprendizaje autónomo.
- Reconocer la mutua influencia entre ciencia, sociedad y desarrollo tecnológico, así como las conductas ciudadanas pertinentes, para procurar un futuro sostenible.

Tabla 44 Oportunidades orientadas a contenidos didácticos específicos

ORIENTADAS A CONTENIDOS DIDÁCTICOS ESPECÍFICOS	PROBLEMAS	Nº DE VECES
Aprender qué es el árbol del problema y para qué se utiliza	1, 4	3
Conocer que todas las ramas del árbol deben llevar a la resolución del problema.	4	2
Aprender a realizar una validación de un árbol del problema, utilizando una rúbrica.	4	2
Conocer las fases de una discusión en gran grupo	1, 4	2
Aprender a identificar si una actividad evalúa un determinado estándar de aprendizaje	4	2
Aprender cómo diseñar una actividad que evalúe un determinado estándar de aprendizaje	4	2

Las oportunidades orientadas a contenidos didácticos específicos se relacionan estrechamente con las siguientes competencias específicas:

- Conocer el currículo escolar de matemáticas.
- Valorar distintas estrategias metodológicas adecuadas a las diferentes áreas del conocimiento en Matemáticas.
- Plantear y resolver problemas vinculados con la vida cotidiana.
- Desarrollar y evaluar contenidos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y promover las competencias correspondientes en los estudiantes.

Revisando todas las tablas, queda en evidencia que hay oportunidades de aprendizaje que se han detectado varias veces y en problemas distintos. Consideramos que esto es razonable. Así, si las oportunidades son aprovechadas, el aprendizaje de nuevos contenidos matemáticos, de nuevas estrategias de autorregulación o de nuevos contenidos didácticos se sustentará sobre las bases de otros adquiridos en problemas anteriores y se ampliará en cada discusión.

Observamos que hemos relacionado todas las competencias transversales y específicas de la asignatura con algunas de las oportunidades de aprendizaje. Debido a esto, es razonable pensar que la secuencia didáctica resultará útil en el contexto de la asignatura Matemáticas y su Didáctica III y que contribuirá a la adquisición de la competencia general: *Diseñar estrategias didácticas adecuadas a la naturaleza del ámbito científico partiendo del currículo de Primaria, para las áreas de Ciencias Experimentales, Ciencias Sociales, Matemáticas, Lengua, Música, Plástica y Educación física.*

7.4 Aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje

Hemos tratado de escoger algunos ejemplos de oportunidades de aprendizaje que fuesen significativas para mostrar el estudio del aprovechamiento de los estudiantes. Sin embargo, somos conscientes de que todas las oportunidades de aprendizaje no son igualmente evaluables y ello no depende del tipo (Morera, 2013).

Hay algunas oportunidades de aprendizaje cuyo aprovechamiento se puede evidenciar en el progreso del propio alumno si se tiene registro de la totalidad de la discusión. El problema es que la posibilidad de evaluarla depende de lo participativo que sea el alumno, porque es posible que, aunque realmente la haya aprovechado, quizá no lo pone de manifiesto.

En otras ocasiones, el aprovechamiento de una oportunidad de aprendizaje se evidencia en la realización de otro problema de la secuencia. Por otro lado, hay casos que requieren una observación profunda durante un período de tiempo más largo.

En el apartado 6.2 se presentan evidencias del progreso de algunos alumnos, mostrando las respuestas obtenidas en la aplicación de distintas herramientas de evaluación, contrastando con las construcciones o los argumentos entregados por las parejas, así como con intervenciones del alumno durante las discusiones. En el análisis se valoraba el aprovechamiento de oportunidades seleccionadas por su importancia y su amplia presencia durante las discusiones en gran grupo. Así, uno de los resultados que obtenemos es que existen alumnos que han aprovechado al menos algunas de las oportunidades detectadas. Podemos decir que la sistemática ha sido productiva para estos alumnos.

Puede ocurrir que las interacciones sean productivas solo para algunos participantes y no para todos (Kieran, 2001). En nuestro análisis, hay casos en los que no se observan evidencias de aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje. Puede ser que hubiera habido más aprendizaje del detectado y que por falta de evidencias no pueda añadirse en este trabajo.

Aprovechar las oportunidades de aprendizaje detectadas no significa que los alumnos hayan progresado competencialmente al nivel que se espera de ellos. En el apartado anterior hemos presentado la relación de las oportunidades de aprendizaje detectadas con las competencias descritas en la guía docente. Tras haber establecido esta correspondencia, sí podemos concluir que los alumnos que han evidenciado aprovechamiento de las oportunidades han progresado en el sentido de la guía docente vigente.

Capítulo 8. Conclusiones y discusión

En este último capítulo retomamos todos los resultados obtenidos a lo largo del estudio descrito en esta tesis, para discutirlos a la luz de las teorías que han servido de fundamentación. Esto nos permite responder a las preguntas que nos planteábamos al principio de la investigación y proponer futuras líneas de profundización.

8.1. Conclusiones relativas al análisis de la sistemática

En este apartado, mediante la interpretación conjunta de los resultados obtenidos en el capítulo 7, responderemos a la pregunta de investigación: **¿Cómo se pueden potenciar las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje de las isometrías en futuros maestros de primaria, mediante la orquestación de discusiones en gran grupo con el uso de la tecnología?**

La implementación de la secuencia didáctica ha generado oportunidades de aprendizaje y algunas de ellas han sido aprovechadas por los alumnos. De estos resultados se desprende que la sistemática promueve la relación entre el aprendizaje y la enseñanza de las isometrías y su didáctica, mediante discusiones en gran grupo con el uso de la tecnología.

El instrumento ‘Detector de oportunidades de aprendizaje’ ha permitido realizar un análisis exhaustivo de las acciones en las discusiones en gran grupo y las oportunidades de aprendizaje que generan. Consideramos que, además sería posible utilizar este instrumento para perfilar un guion de las discusiones, basado en un árbol del problema.

En nuestro caso, hemos observado que la buena anticipación del problema se relaciona con el número de estadios y esto influye en la riqueza en cuanto a oportunidades de aprendizaje, así coincidimos con las conclusiones de Morera (2013) que expusimos en el apartado 2.3. La tecnología y la dinámica de participación de los estudiantes también repercute en la aparición de oportunidades y la orquestación de la profesora es fundamental para el equilibro entre estos factores que influyen en la riqueza del problema.

Las competencias de la guía docente de la asignatura Matemáticas y su Didáctica III están en sintonía con las oportunidades de aprendizaje detectadas. Podemos concluir que la relación entre la enseñanza y el aprendizaje durante la secuencia es evidente ya que las competencias materializan los objetivos de la enseñanza. Además, observamos que ha contribuido al desarrollo matemático del conocimiento especializado de los futuros profesores de matemáticas en el sentido de Carrillo y Díaz (2019).

La secuencia ha favorecido el desarrollo del dominio del contenido matemático, tanto de los temas como de la estructura y de la práctica matemática. Las oportunidades de aprendizaje que se han detectado en este sentido están vinculadas a contenidos geométricos y en especial a las isometrías que involucran visión espacial.

Ha quedado evidenciado que ha contribuido al dominio del conocimiento didáctico del contenido matemático. Sobre todo, durante el desarrollo del cuarto problema se ha puesto especial hincapié en el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, de las características del aprendizaje matemático y de los estándares de aprendizaje matemático presentes en el Decreto Currículo de la Comunidad de Madrid (Decreto 89/2014 de 24 de julio, 25 de julio, 2014).

No hemos analizado de forma específica si el desarrollo de la sistemática ha influido positivamente en el dominio de creencias y concepciones sobre las matemáticas y su aprendizaje. Consideramos que esto deberá tenerse en cuenta en futuras investigaciones en la línea de trabajo de investigación sobre la formación de los profesores que impartirán la asignatura de matemáticas.

Los resultados obtenidos contribuyen a mejorar el conocimiento de la relación entre el aprendizaje y la enseñanza desde una doble perspectiva que incluye el trabajo colaborativo y el uso de la tecnología en el contexto del Grado de Magisterio de Educación Primaria. El trabajo colaborativo se ha realizado mediante discusiones en gran grupo y el uso de la tecnología ha sido en torno al software de geometría dinámica GeoGebra.

1.1 Discusión

En este aparatado reflexionamos sobre la adecuación de los objetivos de la investigación y de la metodología empleada para responder a la pregunta de investigación.

8.1.1. Reflexión sobre la adecuación de los objetivos de la investigación

Para responder a la pregunta de investigación era necesario buscar referencias acerca de las discusiones en gran grupo y la utilización de la tecnología en clase. Hemos implementado en la formación de maestros la estructura de la investigación realizada por Morera (2013) que se centra en el estudio conjunto de estas dos perspectivas. Al ubicarnos en el contexto del Grado de Magisterio de Educación Primaria, además se hizo necesario fundamentar cuál es el conocimiento específico que debe tener un profesor de matemáticas.

Pretendíamos aproximar respuestas a la pregunta de investigación mediante la consecución de dos objetivos fundamentales. El primer objetivo se ha alcanzado mediante la planificación, la implementación y evaluación de la sistemática bajo el soporte de GeoGebra y el posterior análisis realizado en el capítulo 5. Los resultados obtenidos de este análisis se encuentran en el apartado 7.2 del capítulo 7.

La sistemática a su vez ha sido clave para la consecución del segundo objetivo, relacionado con la detección de las oportunidades de aprendizaje de las isometrías y de contenidos didácticos específicos. En el capítulo 6 analizamos las oportunidades de aprendizaje, así como su aprovechamiento. Los resultados se resumen en los apartados 7.3. y 7.4.

Para poder evidenciar que la implementación de la secuencia ha sido productiva es fundamental cerciorarse de la funcionalidad de la sistemática. Mediante la detección de oportunidades de aprendizaje hemos comprobado esta funcionalidad. Además, algunos estudiantes han mostrado aprovechamiento de ciertas oportunidades de aprendizaje detectadas.

Hemos establecido que las oportunidades de aprendizaje detectadas están relacionadas con competencias establecidas en la guía docente de la asignatura del Grado de Magisterio de Educación Primaria. Esto guarda relación con que la secuencia didáctica contribuye al desarrollo de los sujetos como profesores de matemáticas, según el modelo MTSK desarrollado por Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013). Ya que las competencias están relacionadas con los dominios y subdominios que contempla este modelo (Carrillo y Díaz, 2019).

Tras la discusión conjunta de la pregunta de investigación y los objetivos con los resultados obtenidos, consideramos que la estructura de la investigación es coherente.

8.1.2. El papel de la metodología de investigación

La metodología de nuestra investigación (design research) se ha adaptado a las necesidades de la pregunta y los objetivos planteados para este trabajo. Hemos tomado como referencia un contexto natural para la realización de las diferentes iteraciones del experimento en el que la docente está completamente implicada en la investigación. El análisis del diseño instruccional ha sido exhaustivo. Además, hemos utilizado el instrumento externo TRU-Math (Schoenfeld, 2013) para comprobar la eficacia de la implementación de la secuencia.

El instrumento ‘Detector de oportunidades de aprendizaje’ ha tenido un papel decisivo porque su minuciosa aplicación nos ha llevado a obtener características interesantes de las discusiones en gran grupo con tecnología. Nos ha permitido encontrar resultados acerca de las características de los elementos involucrados en el análisis que contribuyen a entender las relaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Hemos generalizado la utilidad del instrumento creado por Morera, Planas y Fortuny (2013) para una investigación desarrollada en un entorno universitario de formación de maestros.

Concluimos que la investigación ha generado contribuciones en dos dominios: el diseño de la secuencia didáctica y la estructura del contenido de aprendizaje (Prediger, 2019). El segundo aspecto tiene relación con las oportunidades de aprendizaje que han surgido en el desarrollo.

8.3 Implicaciones didácticas

Este estudio ofrece, como aportación didáctica, todo el material creado para la secuencia y ejemplos de cómo sacar provecho de estas discusiones en gran grupo con tecnología. Tanto los problemas como los árboles asociados a los problemas 1, 2 y 3 han incorporado aspectos que no se habían tenido en cuenta en el taller piloto 2.

Para llevar a cabo la sistemática que hemos expuesto en este trabajo recomendamos seguir la misma estructura, aunque la fase de conexión se puede considerar incluida en el resto, ya que hemos observado que se realizan conexiones continuamente durante el desarrollo de la secuencia didáctica. Sin embargo, para el análisis sí nos parece adecuado examinarla por separado.

Es probable que la secuencia resulte más productiva si los alumnos están acostumbrados a que la dinámica de clase siga discusiones en gran grupo. Si generalmente trabajan bajo una disciplina estricta en la que el profesor es la máxima autoridad, esto dificultará la dinámica de las discusiones. Por otro lado, sería deseable que hubiera un trabajo previo por parte del docente de algunas técnicas para fomentar la intervención y la implicación de todos los componentes del grupo. Además, la instrumentalización de la herramienta GeoGebra es fundamental. Por ello, proponemos que se trabaje en cursos precedentes y/o en temas anteriores de geometría utilizando el SGD, fijándonos especialmente en que interioricen el uso del arrastre para conjeturar y para comprobar.

Para realizar la anticipación recomendamos que se utilicen los árboles del problema que hemos diseñado y adaptado tras cada una de las iteraciones. Es posible que cuando un profesor del Grado de Magisterio de Primaria utilice nuestra secuencia surjan nuevas ramas o pueda incluir comentarios o preguntas en las ramas existentes. Durante el desarrollo de los problemas planteados en la secuencia se debe tener en cuenta que la tecnología toma un papel importante.

Recomendamos que se insista en trabajar en primer lugar individualmente, luego en parejas con el uso de un único ordenador, después en gran grupo y para finalizar se vuelva al trabajo individual, realizando una reflexión tras la discusión en gran grupo de cada problema. La monitorización debe tener en cuenta la observación durante las sesiones de trabajos con el ordenador y las soluciones presentadas.

Sugerimos utilizar el instrumento 'Detector de oportunidades de aprendizaje' (Morera, 2013) para la secuenciación de los contenidos a tratar. Además, los árboles del problema son útiles tanto para la fase de monitorización como implementación y secuenciación.

Para el diseño e implementación de nuevas secuencias didácticas que involucren el uso de la tecnología y las discusiones, sugerimos algunas recomendaciones tras nuestra experiencia.

La anticipación es fundamental, por ello recomendamos diseñar un 'árbol del problema' que sirve inicialmente para plasmar la didáctica mental que tiene el profesor en la cabeza. Después, hemos descubierto más aplicaciones a lo largo del desarrollo de la secuencia. Consideramos que este instrumento debe servir como guion inicial tanto en la monitorización durante el trabajo con el ordenador, como en el desarrollo de discusiones. Es posible perfilar este guion utilizando la tabla que nosotros hemos empleado únicamente en el análisis aplicando el instrumento 'Detector de oportunidades de aprendizaje'. Predecir todas las actuaciones de los alumnos resulta imposible, por lo que este guion no puede ser cerrado y el profesor debe tener capacidad de adaptación a las intervenciones. Debe favorecer que los alumnos sean el centro de la actividad docente y sean capaces de construir su propio aprendizaje.

En todas las encuestas realizadas tras cada una de las iteraciones, los alumnos han manifestado que prefieren trabajar en el aula de informática en parejas en lugar de individualmente. Cuando esto ocurre, los alumnos intercambian conjeturas y ellos mismos también han afirmado que este intercambio favorece el aprendizaje. Por este motivo, creemos que el diseño de secuencias didáctica que involucren tecnología y discusiones en gran grupo debe estar anclado en la resolución de problemas por parejas. Sin embargo, no debe perderse de vista que un primer acercamiento individual antes de conjeturar en común ayuda a reflexionar sobre los conocimientos sobre los que parte el alumno. Además, es importante un espacio de reflexión personal después de cada sesión de discusión en gran grupo.

Ha resultado muy positivo que las discusiones se realizaran bajo el andamiaje de una solución propuesta por una pareja. No tenemos conclusiones claras sobre si es preferible elegir una solución correcta y completa, una incompleta o una incorrecta. En nuestro caso, hemos llegado a situaciones ricas en oportunidades de aprendizaje habiendo elegido soluciones de diferente naturaleza. Para elegir la solución deben tenerse en cuenta los objetivos que se quieren abordar y la observación de la pareja durante su trabajo con el ordenador.

Recomendamos el uso de los instrumentos TRU-Math y ‘Detector de oportunidades de aprendizaje’ para un análisis en profundidad de la eficacia de la secuencia tras la aplicación de la sistemática. Aunque reconocemos que es necesario invertir un tiempo del que es posible que un profesor de matemáticas no disponga. Para solventar este problema nos parece muy relevante el trabajo en equipo y tener en cuenta la importancia de la reflexión sobre la propia práctica de enseñanza.

8.4 Limitaciones y prospectiva.

En este último apartado de las conclusiones, nos parece fundamental hablar sobre las limitaciones de nuestra investigación y recomendaciones para futuros estudios siguiendo esta línea.

En relación con el ‘árbol del problema’, hemos demostrado ampliamente su utilidad en el desarrollo de este trabajo, en varias fases de la sistemática. Si comparamos nuestros diseños con los de otros autores (Morera, 2013) o los de nuestros alumnos, observamos distintos estilos perfectamente válidos. Nos parece que podría analizarse con detalle el estilo de distintos profesores en su elaboración para la anticipación de un mismo tipo de problema. Creemos, como Morera (2013), que es posible que se encuentren patrones que ayuden a sistematizar su creación.

Se ha podido comprobar que la secuencia didáctica ha generado oportunidades de aprendizaje que en algunas ocasiones han sido aprovechadas por alumnos. Como posible ampliación de nuestro trabajo, sería adecuado trabajar en el análisis de las causas que hayan propiciado más o menos aprovechamiento.

Tras responder a la pregunta de investigación, cumpliendo los dos objetivos de investigación, hemos sido conscientes de que la sistemática es funcional para su aplicación en el contexto de la formación de futuros maestros porque contribuye a la adquisición del conocimiento especializado que debe tener un profesor de matemáticas (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013). Hemos sido capaces de mostrar que contribuye en lo referente al dominio de contenido matemático y en el dominio del conocimiento didáctico del contenido matemático. Sin embargo, no tenemos evidencias de que contribuya al dominio de creencias y concepciones sobre la matemática y sobre su enseñanza. Resulta fundamental tener en cuenta este dominio pues es el elemento que permite entender de una manera íntegra el conocimiento del profesor. Consideramos que es una limitación de nuestro trabajo y proponemos profundizar en su análisis para futuras investigaciones.

Nuestra sistemática ha resultado eficaz desde el punto de vista de las oportunidades de aprendizaje y su aprovechamiento. Como Morera (2013) también concluimos que son necesarias más investigaciones que miren de manera conjunta el trabajo colaborativo con la utilización de la tecnología en todas las etapas.

Anexos

Anexo I Documento de cesión de datos para grabación de vídeo

D./Dña. [……………………………………………………………………………………………] mayor de edad, con fecha de nacimiento ……/………/………..con DNI…………………., (en lo sucesivo EL CEDENTE) mediante la firma del presente documento

AUTORIZO EXPRESAMENTE A:

CES Don Bosco con CIF_________, con domicilio social en Calle María Auxiliadora, 9, 28040 Madrid, a obtener y fijar imágenes de mi persona a través de grabaciones audiovisuales, fotografías o cualquier otro medio adecuado para la captación de imágenes durante el desarrollo del evento [N*ombre fecha y lugar del evento]*

Reconozco que los derechos de explotación sobre el resultado de la captación de mi imagen por CES Don Bosco corresponderán en su totalidad a ésta, quedando incluso facultada para su cesión a terceros. La presente autorización se otorga de conformidad con lo previsto en el artículo 2 de la Ley Orgánica 1/82, de 5 de Mayo, de Protección Civil al Derecho al Honor, la Intimidad Personal y Familiar y a la Propia Imagen.

Dicha autorización se refiere a los usos de la imagen para la edición de folletos, reportajes, vídeos, fotografías, páginas web, redes sociales o cualquier otro medio o soporte que permita la reproducción de la imagen y su posterior explotación de la manera más amplia prevista por la regulación aplicable, utilizando los medios técnicos conocidos en la actualidad y los que pudieran desarrollarse en el futuro.

La autorización no tiene ámbito geográfico determinado por lo que CES Don Bosco, podrá hacer uso de dichas imágenes, o partes de las mismas, en todos los países del mundo sin limitación geográfica de ninguna clase.

La autorización no fija ningún límite de tiempo para su concesión ni para la explotación de las imágenes, o parte de las mismas, por lo que se considera concedida por un plazo de tiempo ilimitado.

La presente cesión se realiza sin contraprestación alguna, es decir, a título gratuito.

Todo ello con la única salvedad y limitación de aquellas utilizaciones o aplicaciones que pudieran atentar al derecho al honor en los términos previstos en la Ley Orgánica 1/82.

En conformidad de lo cual, firmo la presente autorización en Madrid, a…. /…….de 20….

Nombre:

Firma:

Información básica sobre protección de datos	
Responsable del tratamiento	CES Don Bosco Domicilio: Calle María Auxiliadora, 9, 28040 Madrid. E-mail: direccion@cesdonbosco.com
Finalidad del tratamiento	Grabación y difusión de imagen para la promoción de la actividad de la entidad
Legitimación	Consentimiento del interesado
Destinatarios	Las imágenes y/o vídeo se difundirán a través de cualquier medio, incluidos los electrónicos
	No se realizarán transferencias internacionales de datos, sin perjuicio de que la cesión de derechos de imagen no se limita territorialmente al ámbito nacional.
Derechos	Podrá acceder, rectificar y suprimir los datos, así como revocar la autorización para el tratamiento de los datos, ejercitar los derechos de limitación, portabilidad, y a no ser objeto de decisiones automatizadas dirigiéndose por escrito a la dirección postal que consta en la presente tabla, o a la dirección de correo electrónico: dpd@salesianas.org.
Procedencia	Los datos son facilitados por el propio interesado.

a) **Finalidad del tratamiento:** La finalidad del tratamiento de datos grabar su imagen y emplearla para ilustrar, promocionar y difundir la actividad de CES Don Bosco a través de cualquier medio, incluidos los electrónicos.

b) **Decisiones automatizadas**: no se realiza segmentación de perfiles ni se toman decisiones automatizadas.

c) **¿Por cuánto tiempo conservaremos sus datos?** Los datos serán tratados mientras no revoque su autorización.

d) **Base jurídica del tratamiento:** la base jurídica del tratamiento es el consentimiento manifestado en el presente documento.

e) **Obligación de facilitar los datos y consecuencias de no facilitarlos:** Los datos solicitados (imagen/voz) son obligatorios, puesto que de lo contrario no se podrá realizar la grabación.

f) **Procedencia de los datos:** el propio interesado.

g) **Cesiones y Transferencias:** no se realizarán cesiones de datos a terceras entidades. No obstante, la finalidad del tratamiento es en sí misma, la difusión de las fotografías en a través de medios electrónicos y físicos, lo que por su propia naturaleza implica revelar información a personas distintas del interesado. No se realizarán transferencias internacionales de datos, sin perjuicio de que la cesión de derechos de imagen no se limita territorialmente al ámbito nacional.

h) **Derechos del interesado:** tiene derecho a obtener confirmación sobre si estamos tratando datos personales que les conciernan, o no. Como interesado, tiene derecho a acceder a sus datos personales, así como a solicitar la rectificación de los datos inexactos o, en su caso, solicitar su supresión cuando, entre otros motivos, los datos ya no sean necesarios para los fines que fueron recogidos.

En determinadas circunstancias, podrá solicitar la limitación del tratamiento de sus datos, en cuyo caso únicamente los conservaremos para el ejercicio o la defensa de reclamaciones. En determinadas circunstancias y por motivos relacionados con su situación particular, podrá oponerse al tratamiento de sus datos. Dejaremos de tratar los datos, salvo por motivos legítimos imperiosos, o el ejercicio o la defensa de posibles reclamaciones.

En aquellos supuestos en los que el tratamiento de sus datos estuviera basado en su consentimiento, podrá revocarlo en cualquier momento.

En aquellos supuestos en los que legalmente proceda, tendrá el derecho a la portabilidad de los datos, lo que implica que tiene derecho a recibir los datos personales relativos a su persona, que estemos tratando, y almacenarlos en un dispositivo propio, este derecho también le permite solicitarnos que comuniquemos sus datos a otro responsable del tratamiento.

Asimismo, en caso de que considere que existe un problema o una incidencia en relación con el tratamiento de datos puede contactar con la entidad a través de la dirección de contacto indicada en el presente documento, y en cualquier caso, tiene derecho a presentar una reclamación ante la Autoridad de Control en materia de protección de datos de carácter personal, que en el caso de España es la Agencia Española de Protección de Datos.

Para ejercer sus derechos debe remitirnos una solicitud a la dirección de correo electrónico dpd@salesianas.org adjuntando copia de su DNI, u otro documento que lo identifique legalmente.

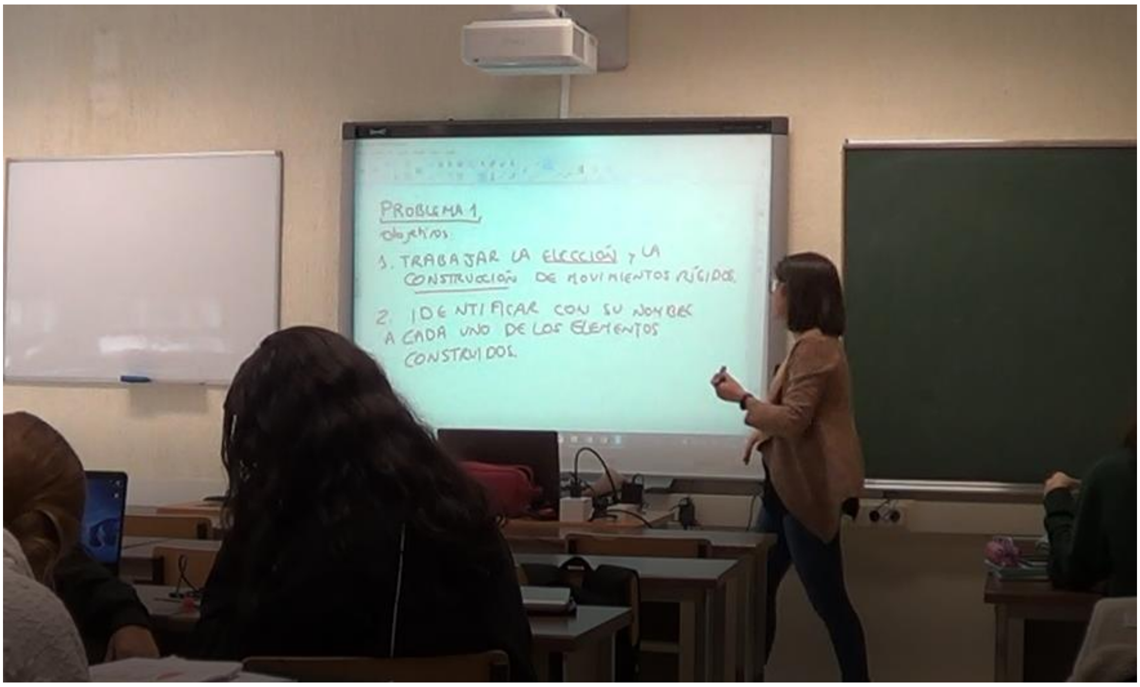
Anexo II. Análisis de puesta en común.

I. Puesta en común del problema 1

Episodio 1 (e_1): Recordatorio del enunciado.

Profesora: *Pero primero había otro problema… Había dos problemas distintos. El problema 1 ¿os acordáis que había una muñeca que había que construir con figuras geométricas? Os recuerdo brevemente cuál era el objetivo de ese problema y ahora sale una pareja a contarnos cómo lo ha hecho. (…) Estábamos en el tema de movimientos en el plano, habíamos hecho en geogebra Tarea 1 y Tarea 2 ya hace un montón. Habíamos iniciado una secuencia de problemas y habíamos hecho el 1 y el 2. El problema 1 tenía un doble objetivo que a la vez el de arriba se divide en varios. Primero, teníamos que elegir para cada uno de los elementos un movimiento. Había cuatro posibles movimientos que elegir, podíamos hacer un giro, una traslación, una simetría o una simetría deslizante y había tres elementos, o sea que a uno había que aplicarle dos cosas. Entonces había que elegir y luego había que construir para formar una determinada pieza. Entonces el primer objetivo era doble.*

Luego se pedía en cuadros de texto decir el nombre de los elementos. Entonces el otro objetivo es identificar con su nombre cada uno de los elementos (…)



Para la anticipación a vuestros pasos, os conté un poco por encima el otro día que había un elemento que era el árbol del problema. Os voy a enseñar, antes de empezar la discusión, cómo es el árbol del problema asociado a este Problema 1.

¿Qué significa "árbol del problema"? Es un instrumento para llevar a cabo la fase de anticipación.

¿Por qué estoy dándole importancia? Porque en el problema 4, vosotros vais a tener que hacer un árbol del problema. Lo haremos mañana en informática. (…)

Representa un proceso lógico de pensamiento en un diagrama de flujo. Consiste en una estructura esquemática en forma de árbol, en el que las ramas muestran las diferentes estrategias que el alumno seguirá para la resolución del problema. No es un camino cerrado de tipo algorítmico (…) ¿sabéis lo qué es un algoritmo? Un algoritmo son unos pasos tipo receta. (…) Es un sistema dinámico que se puede ir actualizando.

En el problema 1 yo lo planteaba (…) Este diagrama de flujo, al final, llega al cumplimiento de los dos objetivos, tanto el de construir los elementos como el de identificarlos con su nombre. (…) Cuando he conseguido las dos cosas, el problema está resuelto.

Este árbol del problema, al principio no era así. Hice este ejercicio antes con otra clase y el diagrama de flujo era mucho más escueto. (…) Podéis ver todas las ramas que he añadido. En la primera fase era así y he añadido las ramas tras ver cómo resolvían el problema los alumnos de la otra clase. (…) Seguramente que si lo aplicara más veces, más ramas saldrían. ¿Entendéis lo que es?

Grupo clase: *Sí*

Profesor: *Vamos a empezar en esta clase lo que se llama discusión en gran grupo. Para sacar oportunidades de aprendizaje de ese problema que hemos hecho, como contenidos, procesos … para aprender sobre movimientos en el plano, no sobre GeoGebra.*

Las fases de discusión en gran grupo, empiezan con situación del problema que es lo que estamos haciendo ahora y vamos a pasar a presentación de una solución que es lo que va a hacer aquí una pareja.

No sé si hay alguien a quien le apetezca.

Sale una pareja voluntaria, pero la profesora prefiere que salgan al segundo y se lo dice. ¿Podéis salir vosotros dos si no os importa?

Cristina: *Bueno a ver, decía construid una figura semejante a la anterior, aplicando una simetría, una traslación, un giro y una simetría deslizante a las piezas, según corresponda. Señala en cada pieza … bueno eso ya…*

En este primer episodio, la profesora trae a colación los objetivos del problema 1, el árbol del problema y las fases de la discusión en gran grupo. Es uno de los miembros de la pareja que va a hacer el trabajo del Sherpa quién lee el enunciado.

Tras la descripción de lo que ocurre en este episodio, representamos el esquema visual.

Cristina		Recapitulación (enunciado – Problema 1)
Profesora	Recapitulación (objetivos, árbol del problema, discusión en gran grupo)	

Oportunidades de aprendizaje:

Oportunidades orientadas a contenidos didácticos específicos.

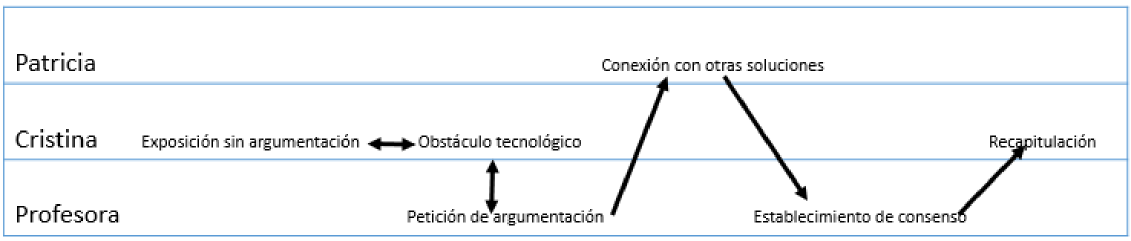
- *Aprender qué es el árbol del problema y para qué se utiliza:* Durante la sesión en el aula de informática, se había presentado el árbol del problema, pero de una manera superficial. En esta ocasión, la profesora lo define formalmente y lo presenta como herramienta de anticipación.
- *Conocer las fases de una discusión en gran grupo:* La profesora proyecta en la PDI, las ocho fases de una discusión en gran grupo.

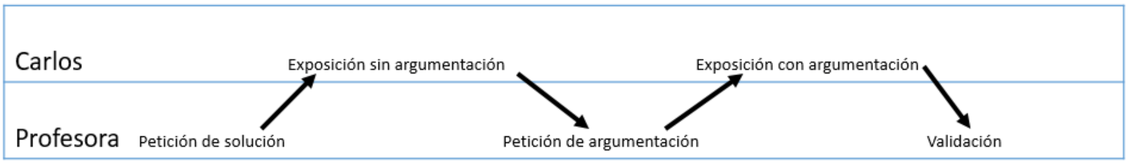
Episodio 2 (e_2): Construcción de un giro.

Participante	**Intervención**	**Interpretación**
Cristina	*Lo que hemos hecho está aquí. En la cabeza hemos hecho un giro de 90º con respecto al punto M. (Se levanta e indica en la pizarra dónde estaba y dónde está la imagen).*	Exposición sin argumentación
Profesora	-Al tocar la pizarra, la imagen de la pantalla se mueve. *Podemos desconectarla como pizarra.* -La pizarra a partir de este momento se utiliza como un proyector.	Obstáculo tecnológico.
Cristina	*Como veis aquí estaba el punto M y hemos girado la cabeza así 90º*	Exposición sin argumentación.
Profesora	*¿Eso es en sentido horario o antihorario?*	Petición de argumentación.
Cristina	*¿Antihorario? (duda).* Su compañera Radhika le ayuda, marcando el giro en el sentido contrario.	Conexión con otra soluciones.
Profesora	*Si lo haces así ¿Cuántos grados son?* *Hay gente que ha puesto otra cosa.*	
Patricia (desde el sitio)	*270º*	

Profesora	*Eso es. ¿De 90º a 360º quedan …?* *Está bien decir 90º en sentido antihorario que es lo que habéis puesto vosotras (las que están haciendo el trabajo del sherpa) y está bien decir 270º en sentido horario que es lo que han puesto ellas (las que están sentadas).*	Justificación empírica. Establecimiento de consenso
Cristina	*Sí, a ver, porque horario es así (hace el gesto con la mano) y antihorario es así (hace el gesto con la mano). Entonces 90º no es todo esto, es esto. (Lo señala en el proyector).*	Recapitulación
Profesora	*¿Y todo el mundo tenía que colocar el centro de giro en el mismo sitio para poder colocar la cabeza o podíamos colocarlo en distintos puntos? ¿Todo el mundo ha colocado ahí el centro de giro?*	Petición de solución
Carlos (desde su sitio)	*No*	Exposición sin argumentación.
Profesora	*¿Por qué? ¿El ángulo de giro también podía ser distinto?*	Petición de argumentación.
Carlos	*No. El ángulo es el mismo pero podría ser cualquier punto*	Exposición con argumentación.
Profesora	*Vale. Podría ser cualquier punto. Para colocar la primera pieza tenemos total libertad.*	Validación

El esquema visual de este episodio se ha dividido en dos, ya que en este caso se diferencian dos oportunidades de aprendizaje de naturaleza diferente.





Oportunidades de aprendizaje.

Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos.

- *Revisar la noción de sentido del giro:* Las alumnas que exponen su solución en la pizarra han realizado un giro con un ángulo determinado, sin mencionar el sentido hasta que la profesora les hace conscientes. Tras la puesta en común y las intervenciones de otros compañeros, tanto las alumnas que hacen el "trabajo del sherpa" como los otros pueden revisar la noción de sentido de giro "horario o antihorario".

Oportunidades orientadas a autorregulación.

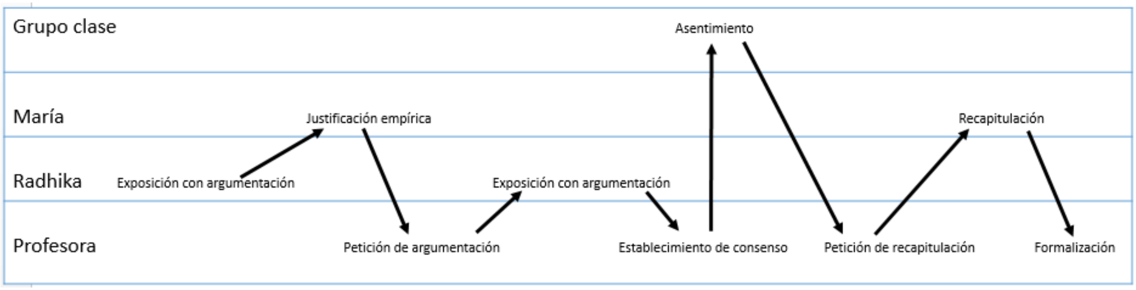
- *Necesidad de justificar mediante argumentos:* Continuamente se provoca la justificación de la solución.

Episodio 3 (e3): Construcción de una simetría.

Participante	**Intervención**	**Interpretación**
Radhika	*En el cuerpo hemos hecho una simetría axial con respecto a esta recta* (la señala en la pizarra-proyector). *Teníamos aquí el cuerpo y entonces al aplicarle la simetría axial, lo que ha hecho ha sido* (lo explica con las manos).	Exposición con argumentación
María (desde su sitio)	*Hace gestos para expresar simetría con sus manos, desde el asiento.*	Justificación empírica
Profesora	*¿Y en este caso también tenemos total libertad para colocar el eje?*	Petición de argumentación.
Radhika	*No porque queremos que esta parte quede justo* (lo señala con la mano)…	Exposición con argumentación.
María (desde su sitio)	*Enfrente.*	

Radhika	*Enfrente. Si la pusiésemos aquí (señala otro segmento del plano con el brazo) sería justamente al contrario, esta parte quedaría también justamente a este lado y no sería lo que nosotros estamos buscando.*	
Profesora	*¿Estáis de acuerdo todos en que no se puede poner en cualquier lugar el eje de simetría?*	Establecimiento de consenso.
Grupo clase	*Sí*	Asentimiento
Profesora	*¿De qué depende?*	Petición de recapitulación.
María (desde su sitio)	*De dónde caiga la otra.* (Se refiere a la pieza que se ha colocado con un giro).	Recapitulación.
Profesora	*Si primero coloco la otra, todo lo demás está condicionado.*	Formalización.

Esquema visual del episodio:



Oportunidades de aprendizaje.

Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos.

- *Revisar la noción de simetría:* La alumna que expone la solución y la que habla desde su mesa, recuerdan que el elemento fundamental de la simetría es una recta, que llamamos eje de simetría. Además, las imágenes quedan "enfrentadas". La orientación se invierte. Lo que evidencian con los gestos de las manos.

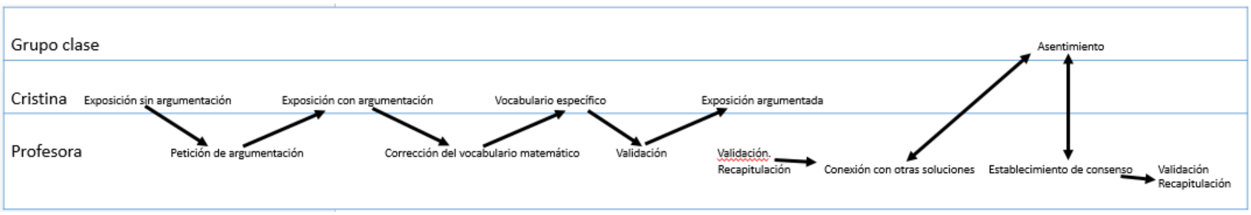
Oportunidades orientadas a diferentes estrategias.

- *No hay libertad para la elección del eje de simetría:* Durante este episodio se provoca para hacer conscientes a los alumnos de que, una vez elegido el centro de giro para la figura anterior, el eje de simetría se debe colocar en una posición concreta.

Episodio 4 (e_4): Construcción de una simetría deslizante.

Participante	Intervención	Interpretación
Cristina	Vale, en la primera pierna hicimos una simetría deslizante.	Exposición sin argumentación
Profesora	*¿La simetría deslizante qué es? No me acuerdo…*	Petición de argumentación.
Cristina	*Pues es una simetría con desplazamiento.*	Exposición con argumentación.
Profesora	*¿Desplazamiento? ¿Desplazamiento cómo se llama?*	Corrección de vocabulario matemático.
Cristina	*Eeh traslación.*	Vocabulario específico.
Profesora	*Vale*	Validación.
Cristina	*¿Qué pierna he dicho que era? La izquierda vale, nada. Hacemos una simetría axial de esta pierna a aquí (señala). Con respecto a la recta PQ. De esta pierna izquierda después hicimos una traslación con el vector PU.*	Exposición con argumentación.
Profesora	*Vale. Habéis hecho primero la simetría y luego la traslación.* *Hay alguien que lo ha hecho al revés. Primero la traslación y luego la simetría. ¿Alguno que esté aquí hizo traslación y luego simetría?*	Validación. Recapitulación. Conexión con otras soluciones.
Grupo clase	Levanta la mano algunos.	

Profesora	*¿Y eso también es una simetría deslizante?... Si aplico simetría y traslación tengo simetría deslizante y ¿si aplico traslación y simetría obtengo también simetría deslizante?*	Establecimiento de consenso.
Grupo clase	*sí*	Asentimiento.
Profesora	*A ver, no llegamos al mismo lugar pero sí es una simetría deslizante. (…) continuamos y luego vemos un ejemplo de lo que quiero decir. Pero sí, traslación y simetría, simetría y traslación ambos son simetrías deslizantes.*	Validación. Recapitulación.



Oportunidades de aprendizaje.

Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos.

- *Revisar la noción de simetría deslizante:* Se provoca a la alumna que está presentando su solución a definir qué es simetría deslizante.
- *Aprender que, aunque simetría y traslación no sean conmutativos, ambos generan una simetría deslizante:* Previamente se había visto simetría deslizante como composición de simetría y traslación (en ese orden). Durante el taller de GeoGebra algunas parejas eligieron hacer traslación y luego simetría sin que nada se hubiera dicho previamente sobre si generaba una simetría deslizante. Más tarde en esta sesión, la profesora demostrará, con la ayuda de la tecnología, este hecho.

Oportunidades orientadas a diferentes estrategias.

- *Aprender que no existe una única solución.*

Oportunidades orientadas a autorregulación

- *Aprender la necesidad de expresarse con el lenguaje matemático adecuado*: Al solicitar a la alumna utilizar la palabra adecuada, se genera la oportunidad de aprender la importancia del uso del vocabulario adecuado cuando se dispone de él.

Episodio 5 (e5) Poner nombre a los elementos.

Participante	**Intervención**	**Interpretación**
Profesora	*Que respondan los que están sentados. ¿Cómo se llama el punto que define un giro?*	Petición de formalización
María (desde su sitio)	*Punto de giro.*	Uso de vocabulario específico.
Tamara (desde su sitio)	*Centro de giro.*	
Profesora	*Punto de giro no es, se llama centro de giro. Es una cosa de nomenclatura.*	Corrección de vocabulario matemático.
Cristina	*Luego, los vectores para las traslaciones.*	Exposición sin argumentación.
Profesora	*Una cosa, esos vectores. El de la simetría y el de la simetría deslizante, los habéis marcado como vectores distintos. ¿Son distintos realmente?*	Conexión
Cristina	Eeeeh… puede ser porque …	
Profesora	*¿Cómo lo podemos comprobar? ¿Cómo podemos comprobar si esos vectores son distintos o no?*	Petición de argumentación.
Cristina	*Poniéndolo…* (hace gesto con los brazos como si cogiera uno de los vectores y lo pusiera encima del otro).	Justificación empírica.
Profesora	Podéis comprobar, moviéndolo.	

Cristina y Radhika	Se acercan al portátil para hacer cambios en GeoGebra.	
Cristina	*Pero vamos que no los hicimos con la intención de que fueran iguales*.	
Cristina y Radhika	Utilizan el arrastre de GeoGebra y ponen un vector encima del otro, comprobando que son exactamente iguales.	
Profesora	*Son iguales*	Observación de evidencia empírica.
Cristina y Radhika	*Sí*	Asentimiento
Profesora	*A ver, ¿Cuándo dos vectores son iguales?*	Petición de formalización
Cristina	*Cuando tienen el mismo módulo, dirección y sentido.*	Formalización
Profesora	*Si son iguales, realmente podríais haber hecho solamente un vector, aplicarle a uno traslación con ese vector y luego al que se ha hecho la simetría, de nuevo simetría con el mismo vector*.	Recapitulación.
Profesora	*¿Qué elementos quedan?*	Petición de formalización
Cristina	*Las rectas.*	Formalización
Profesora	*¿Qué son?*	
Cristina	(Señala) *estas.*	
Profesora	*¿Recta o segmento? Porque ahí veo segmento.*	Corrección de vocabulario específico.
Cristina	*Es que no podíamos borrarlo. Intentamos borrarlo y no sabíamos cómo se borraba todo.*	Obstáculo tecnológico.
Profesora	*Ojo, no es lo mismo recta y segmento. Recta es una cosa infinita y segmento es algo que está entre dos puntos.*	Uso de vocabulario específico.

Oportunidades de aprendizaje.

Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos.

- *Revisar el vocabulario específico: Centro de giro.* En esta parte de la discusión en gran grupo. El segundo objetivo del problema 1 es que los alumnos identifiquen con su nombre cada uno de los elementos que han construido. En particular, revisamos el nombre de centro de giro al solicitar respuesta a los alumnos que participan desde el sitio, al principio de este episodio.
- *Repaso de los elementos que definen a un vector, cuando dos vectores son iguales:* La profesora pide a las alumnas que están presentando la solución comprobar si dos vectores que han dibujado son iguales. Además, solicita que digan cuáles son los elementos que definen a un vector.
- *Diferenciación de recta y segmento:* Partiendo de una confusión inicial en el nombre del elemento que define una simetría, llegamos a la diferenciación entre recta y segmento.

Oportunidades orientadas a diferentes estrategias.

- *Aprender a argumentar empíricamente, utilizando el arrastre:* Las alumnas no habían sido conscientes de que habían representado en su ejercicio dos veces el mismo vector. Se hace conscientes a estas alumnas y al resto de la clase de la posibilidad que brinda el carácter dinámico de GeoGebra.

Oportunidades orientadas a autorregulación

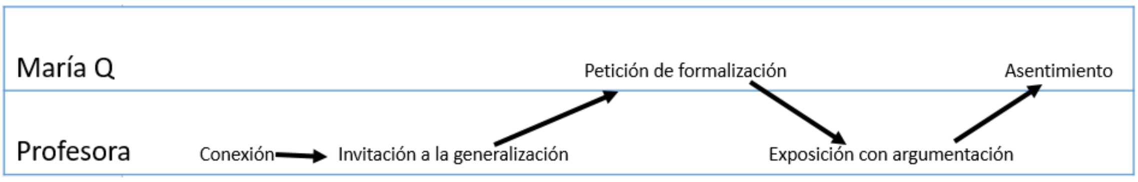
- *Aprender la necesidad de expresarse con el lenguaje matemático adecuado*: Al solicitar a la alumna utilizar la palabra adecuada, se genera la oportunidad de aprender la importancia del uso del vocabulario adecuado cuando se dispone de él.

Episodio 6 (e_6): Reflexión sobre los movimientos rígidos posibles en el plano.

Al finalizar el episodio anterior, las alumnas que estaban haciendo el trabajo del “sherpa” se sientan y queda solamente la profesora en la pizarra. Todos los alumnos que participan, a partir de aquí, lo hacen desde el sitio.

Participante	Intervención	Interpretación
Profesora	*Les he dicho a ellas que la composición de una traslación y una simetría es una simetría deslizante. Vamos a ver si eso es realmente cierto y por qué.* *Para probarlo he cogido un elemento que no sea un polígono, es un elemento que tiene otra forma. Ya hemos trabajado con esta forma en material manipulativo.* *Os digo que los únicos movimientos que puede haber en un plano son: simetría, traslación, giro y simetría deslizante.* (Los escribe en vertical en la pizarra velleda).	Conexión Invitación a la generalización
María Q.	*¿En cualquier plano?*	
Profesora	*En cualquier plano, si un elemento se ha movido a otro sitio va a ser que le he aplicado uno de estos cuatro.* *Entonces, la composición de estos… que componer significa hacer primero uno y luego el otro, tiene que ser uno de estos. Por ejemplo, la composición de una simetría y un giro vamos a ver lo que es. La composición de una traslación y un giro vamos a ver lo que es. Puede ser que de un nuevo giro, que de…*	
María Q.	*Entonces ¿en realidad solo hay tres y si combinación, no?*	Petición de formalización
Profesora	*La combinación de estos tres* (señala traslación, giro y simetría)*, no da uno de estos tres otra vez, da otra cosa distinta* (señala simetría deslizante)*. Por eso hay que añadirle, necesito un nombre específico para este.*	Exposición con argumentación.
María Q.	Asiente	Asentimiento

Profesora	*La composición de cualquiera de estas cosas, vuelve a dar uno de esos.*	
Tamara	*Ah ¿sí?*	
Profesora	*Sí, vamos a verlo.*	



Oportunidades de aprendizaje

Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos.

- *Conocer que la composición de movimientos en el plano puede originar traslación, giro, simetría o simetría deslizante:* La profesora expone este resultado que demostrará en el desarrollo de la sesión lo que parece generar sorpresa en las alumnas que intervienen.

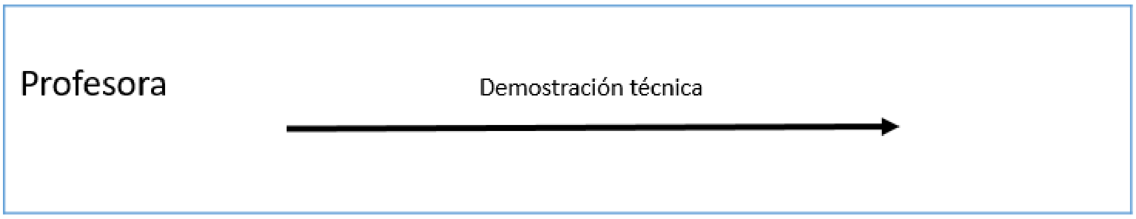
Oportunidades orientadas a autorregulación

- *Aprender la importancia de plantear duda*s Las alumnas que intervienen plantean dudas que pueden suponer la clarificación de lo que está exponiendo la profesora. Gracias a las dudas, la explicación queda complementada.
- *Aprender la necesidad de demostrar las propiedades que se enuncian.* Se trata de una introducción donde se enuncian propiedades que se demostrarán en siguientes episodios.

Episodio 7 (e7): Propiedades de la simetría deslizante

Participante	Intervención	Interpretación
	Voy a empezar con lo que hemos visto de simetría deslizante. Vamos a ver si es lo mismo una traslación y una simetría que una simetría y una traslación.	

	A ver, si yo tengo un eje de simetría que lo voy a poner genérico, y un vector de traslación que lo voy a poner genérico también (representa ambas cosas). *Ahora aplico simetría respecto de esta recta y a este* (señalando al que es imagen del primero) *le aplico traslación respecto de este vector.* *Esta imagen de aquí, este* (señala) *no el primero si no el segundo… es la imagen de una simetría deslizante. Vamos a ver si es verdad que es una simetría deslizante. ¿Características de la simetría deslizante? Ningún punto fijo e invierte la orientación. Que invierte la orientación lo veo ¿no? Hace efecto espejo. Esta es la imagen especular, lo tendría que levantar del papel y saldría la imagen reflejada que es la que hicimos apoyando nuestro papel en la venta y marcando el contorno.* (Se refiere a una sesión anterior con material manipulativo). *Tendría que cumplirse también que no haya ningún punto fijo.* (Arrastra el primer elemento por la pantalla para hacer la comprobación, pero descubre que el vector que ha elegido no es genérico, pues es casi perpendicular al eje de simetría, así que modifica el vector). *Voy a ocultar la imagen producida por la simetría ya que es un objeto auxiliar intermedio.* (Lo hace y señala al simétrico trasladado). *Este es el simétrico deslizado, vamos a ver si realmente no hay ningún punto fijo.* (Ahora vuelve a arrastrar la imagen inicial por la pantalla) *Vale, no lo puedo juntar. No hay ningún punto fijo y he invertido la orientación.* *Si hay un movimiento que respecto al primero invierte la orientación y no deja ningún punto fijo, eso se llama simetría deslizante. No tiene otro nombre. O sea, aunque no me hubieran dado ni el eje de simetría ni el vector, tengo que ser capaz de ver que es una simetría deslizante por sus características.*	Demostración técnica.



Oportunidades de aprendizaje.

Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos.

- *Recordar la noción de simetría deslizante:* La profesora repasa las características de la simetría deslizante con la ayuda de la tecnología.

Episodio 8 (e8): Simetría como composición de simetría y traslación de vector perpendicular al eje.

Participante	Intervención	Interpretación
Profesora	*Hay un caso en el que aplico simetría y traslación y no es una simetría deslizante. Vamos a verlo. Si coloco esto así* (coloca el vector perpendicular al eje) ¿Cómo es el vector respecto al eje? 0 ¿cómo he intentado que sea?	Conexión
Elena	*Perpendicular*	Uso del vocabulario específico
Profesora	*Vale,* (desplaza la figura inicial a la vez que habla) *en este caso, ¿hay algún punto fijo? Si yo esto lo pongo aquí ¿vemos qué está pasando? Uno respecto al otro ¿cómo son?*	Invitación a la participación
	No hay respuesta	
Profesora	*¿Son inversos? ¿Son simétricos?*	
María Q	*No*	Exposición sin argumentación
Profesora	*¿Por qué?*	Petición de argumentación
Carlos	*Todos los puntos están a la misma distancia, invertidos.*	
María Q	*Porque lo vemos, uno está así y el otro está en diagonal.*	Exposición con argumentación

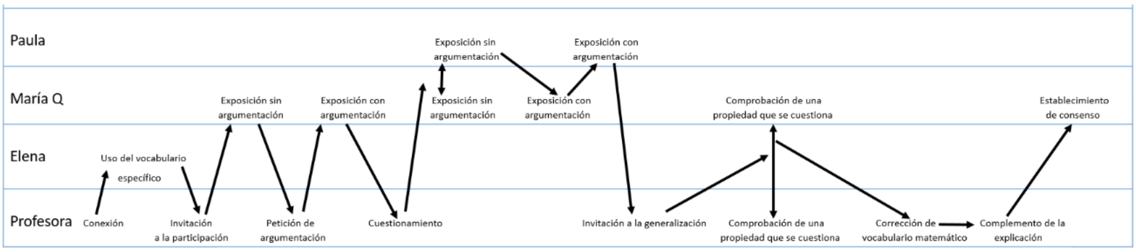
Profesora	*Vamos a ver ¿el eje de simetría tiene que ser siempre una recta vertical?*	Cuestionamiento
María Q	*No pero es que aun así no son simétrico.*	Exposición sin argumentación
Paula	*Yo creo que sí.*	Exposición sin argumentación
María Q	*Yo creo que no. Haz el eje con este, el otro tendría que estar "girao" también* (hace gestos con las manos, marcando un eje vertical)	Exposición con argumentación
Paula	*Si le das la vuelta así…* (hace gesto de espejo con la mano).	
Patricia	*Tú lo pones así…* (gestos con las manos)	Exposición con argumentación
Profesora	Mientras las alumnas discuten, dibuja una recta inclinada entre medias, que es el eje de simetría.	
Paula	*Justo, esa de ahí.*	
María Q.	*Claro, pero uno está así y el otro está así.* (Gestos con las manos)	
Paula	*Claro, pero si los mueves…*	
María Q.	*Si los mueves ya estás alterando. ¿Me sigues?*	
Profesora	*No es exactamente esa recta* (se refiere a la que ha dibujado por aproximación) *pero si hay una recta y la imagen es la reflejada, ese movimiento aunque haya surgido de la composición de simetría y traslación es simetría.* *Vamos a ver, voy a hacerlo con un polígono que a lo mejor en este caso se ve mejor y va a quedar más claro.*	Invitación a la generalización
María Q.	*Sí.*	
	Va borrando cosas	
María Q.	*¿Se puede borrar todo de una vez en GeoGebra?*	
Profesora	*Todo todo todo no lo voy a borrar.* *A ver, voy a coger ese polígono genérico* (dibuja un trapezoide) *y hago simetría de este polígono respecto de este*	

	eje y ahora hago traslación de este polígono respecto de este vector. Vale, me ha quedado ahí. Voy a hacer lo mismo que he hecho con el otro, borro este intermedio. *¿Puedo encontrar una recta, eje de simetría de este polígono respecto de este?*	Comprobación de una propiedad que se cuestiona.
	Silencio relativamente largo	
María Q.	*Sí*	
Profesora	*¿Con los polígonos sí pero con el perro no?*	
María Q.	*Sí, por ejemplo coges el punto N y N' haces un segmento y luego la bisectriz … y ahí va la recta.*	
Profesora	*Mediatriz*	Corrección de vocabulario matemático.
María Q.	*Eso*	
Profesora	(Hace la mediatriz) *Entonces decimos que esto puede que sea un eje de simetría.* (Utiliza el botón para hacer simetría del polígono respecto de la recta que acaba de dibujar) *Hago simetría axial de este vector respecto de esta recta…*	
María Q.	*No*	
Profesora	*¿Por qué no? Porque este vector no es exactamente perpendicular. Si lo pongo perpendicular* (utiliza el arrastre para colocarlo exactamente perpendicular al eje) *entonces sí.*	Complemento de la explicación
María Q.	*Ahora lo veo con el polígono.*	Establecimiento de consenso.
Profesora.	*Un punto y su imagen se llaman puntos homólogos. Tengo que hacer la mediatriz para encontrar el eje de simetría. Cualquier punto y su imagen tienen la misma mediatriz.* *Entonces conclusión, si el vector de traslación es perpendicular al eje de simetría, aunque esté componiendo una simetría y una traslación, el movimiento es simetría.* *¿Vale?*	

	silencio	
Profesora	*Yo creo que hay gente que no se ha enterado…*	
María Q.	*Yo tampoco.*	
Cristina	*Yo tampoco.*	
Profesora	*Vale. En cualquier caso genérico, si yo hago una simetría y una traslación obtengo una simetría deslizante. Claramente no hay ningún punto fijo* (arrastra el vector y luego el polígono inicial y la otra imagen) *no puedo juntar ningún punto con su imagen.* *Pero si compongo una simetría y una traslación en la que el vector de traslación* (vuelve a arrastrar al vector respecto a su posición perpendicular y luego arrastra el polígono para comprobar que encuentra puntos fijos) *es perpendicular al eje de simetría, es una simetría en la que hay infinitos puntos fijos.*	
Cristina	Asiente	
María Q	*Es que hay muchas cosas ¿puedes quitar los perros?*	
Profesora	*¿Quito los perros?*	
Cristina	*Yo los perros me resultaba más fácil*	
María Q.	*Bueno, si no hazlo en la pizarra con cosas más sencillas*	
Profesora	*Bueno, a ver. Entonces, sí voy a hacerlo en la pizarra.* *Tenemos que ser capaces de ver que esto, además de ser una simetría, se puede hacer como composición de simetría y traslación.*	
María Q	*Sí, hasta ahí bien.*	
	Cuando compongo una simetría y una traslación puede ser que tengan el eje de simetría y el vector posiciones cualquiera. *Si en particular el vector de traslación es perpendicular al eje de simetría resulta que tengo una recta de puntos fijos e invierte la orientación. Ese movimiento se llama simetría.*	

María Q.	*¿Por qué no pones el eje recto? Que así es más fácil ver la perpendicular.*	Tratamiento de casos particulares
Profesora	Abre un nuevo documento de GeoGebra para poner un nuevo ejemplo.	
Cristina	*¿Pero tiene simetría respecto a otro eje?*	Observación de evidencia empírica
Profesora	*Eso justo. Es una nueva simetría pero el eje de simetría cambia.*	Validación
María Q.	*Hombre claro, vale. Eso sí.* *Se traslada.*	Auto-corrección Observación de evidencia empírica
Profesora	*¡Justo! Se traslada… ¿Cómo se traslada? ¿Según lo que indica el vector…? Eso hay que verlo* *A ver si tengo un polígono cualquiera, yo he puesto este para ponerlo lo más raro posible* (dibuja un trapezoide) *y una recta que la voy a poner vertical y un vector que le voy a forzar a que sea perpendicular a la recta.* *Entonces ahora aplico una simetría y ahora aplico una traslación al simétrico. Me olvido de este de aquí, lo oculto. Vamos a ver, la figura homóloga y su imagen qué son ¿simétrica, trasladada o simetría deslizante?*	Validación
Unos pocos	*Simétricas*	Desacuerdo
Otros	*Simetría deslizante*	
Profesora	*¿Simetría deslizante? ¿Por qué?*	Petición de argumentación
María Q.	*¿Una figura con la otra?*	
	Pequeño lío en la clase. Comentan entre ellos.	
Profesora	(Señala en la pizarra) *Esta respecto a esta es simétrica o simétrica deslizada*	
Cristina	*Pues depende de cómo lo mires.*	

María Q.	*Respecto a ese dibujo simétrico deslizado*.	Exposición con argumentación
Profesora	*Vale, pero si yo borro esto.* (Se refiere al eje y el vector) *¿Sería simetría?*	Comprobación de una propiedad que se cuestiona
Todos	*Sí*	
Profesora	*¿Por qué?*	
María Q.	*Porque haberlo "hailo"*	
Paula	*Si lo pones en el medio…*	
Profesora	*Si pongo en el medio qué, ¿el eje o la figura?*	
María Q.	*La mediatriz del segmento de los puntos homólogos.*	
Carlos	*La mediatriz.*	
María Q.	(se da la vuelta y explica a Paula, haciendo gestos con las manos) *Coges los puntos iguales de la figura A y B haces una recta y la mediatriz.*	Complemento a la explicación.
Paula	Asiente	
Profesora	*Voy a hacerlo por tanteo. Pongo una recta ahí y oculto todo lo demás. Intuyo que son simétricos. Voy a ver si son simétricos respecto de este eje. Hago la simetría de este objeto respecto de esta. No encaja perfectamente pero intuyo que sí puedo encontrar una recta respecto a la que sí que encaje.*	Justificación empírica
María Q.	*Pero Marta, una pregunta… ¿No sería más fácil hacer segmentos entre todos los puntos y de ahí hacer la mediatriz? Entonces sabrías…*	
Profesora	*Os estáis adelantando, eso era objetivo del segundo ejercicio. Pero sí, sería así.* *Realmente para no hacerlo por tanteo, como bien dice María, podemos hacer la mediatriz entre dos puntos homólogos y me cuadra perfectamente.* (lo hace en GeoGebra a la vez que habla).	



Oportunidades de aprendizaje.

Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos.

- *Aprender que si el eje de simetría es perpendicular al vector de traslación, la composición de simetría y traslación es simetría:* El objetivo de este episodio es el descubrimiento de este resultado. Continuamente se provoca a los alumnos para que recapaciten sobre este hecho.
- *Recordar las características de una simetría.*

Oportunidades orientadas a diferentes estrategias.

- *Aprender a recurrir a casos particulares.* Es una alumna quién sugiere recurrir a un caso particular que le resulta más fácil visualmente para después generalizar.

Oportunidades orientadas a autorregulación

- *Aprender la necesidad de expresarse con el lenguaje matemático adecuado*: La profesora solicita algunas palabras y corrige cuando el lenguaje matemático no es adecuado.
- *Aprender a auto-corregir la solución*. Si nos fijamos en algunas intervenciones de María Q, observamos que es capaz de auto-corregir su

posición. La profesora no corrige su argumentación si no que realiza preguntas y plantea contraejemplos.

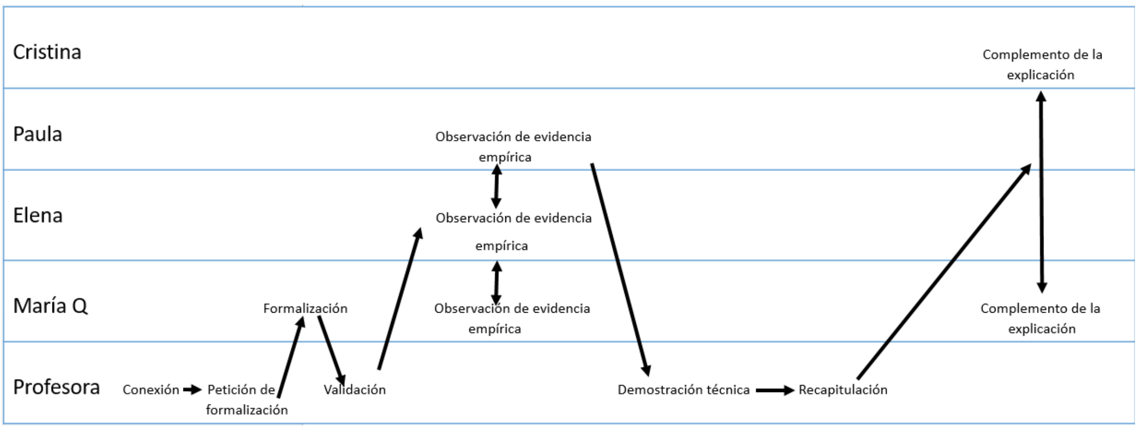
Episodio 9 (e9): Propiedades del eje de la simetría que surge como composición de simetría y traslación con vector perpendicular al eje

Participante	**Intervención**	**Interpretación**
Profesora	*Os estáis adelantando, eso era objetivo del segundo ejercicio. Pero sí, sería así.* *Realmente para no hacerlo por tanteo, como bien dice María, podemos hacer la mediatriz entre dos puntos homólogos y me cuadra perfectamente.* (lo hace en GeoGebra a la vez que habla). (Luego lo borra). *El eje de simetría que había dibujado y he borrado qué cumple respecto al primero.*	Conexión
María Q.	*Que es el eje de la figura que has hecho por simetría deslizante.*	
Profesora	*¿Pero qué relación hay entre el eje que hemos pintado aquí como mediatriz y este de aquí?* *Lo vuelvo a dibujar para que lo veamos.*	Petición de formalización
María Q.	*Es paralelo*	Formalización
Profesora	*Muy bien. El eje es paralelo al*	Validación
María Q.	*¿Puede ser que la traslación sea la mitad del vector?*	Observación de evidencia empírica
Profesora	*Hemos encontrado un eje de simetría respecto a la cual esta figura que era simétrica y trasladada de esta, ahora es simétrica. Me decía María que habría que hacer la mediatriz respecto a todos los puntos pero basta con hacerlo entre dos puntos pero sería la misma recta.* *Entonces esta recta es paralela a esta (lo señala)* *¿Y a parte? (señala al vector)*	

Elena	*Perpendicular al vector.*	Observación de evidencia empírica
Profesora	*Sí. Es perpendicular al vector porque el vector era perpendicular al eje.* *Pero aparte aquí entre G y H… Está…*	
Paula	*La mitad*	Observación de evidencia empírica
María Q	Aplaude por haber acertado	
Profesora	*Está en el punto medio.* *Vamos a ver si se cumple sea cuál sea el vector.* (Utiliza el arrastre para mover el vector, intentando que siga siendo perpendicular al eje) *el eje de simetría cambia con él pero ¿sigue siendo la mitad?*	Demostración técnica
Paula	*sí*	
Profesora	(Lo mueve a una posición no perpendicular) *Si lo pongo por aquí ya no… pero ¿qué está pasando?*	
María Q	*Pues que ya no se cumple.*	
Profesora	*¡Porque ya no es perpendicular!*	
Unos cuantos	*Claro, claro…*	
Profesora	*El vector ya no es perpendicular al eje de simetría, entonces si hago una simetría respecto de este eje ya no va a coincidir aquí.* *En el caso de composición de simetría y traslación cuando el vector de traslación es perpendicular al eje de simetría, el movimiento es equivalente a una simetría donde el nuevo eje es paralelo al primero, perpendicular al vector y además el eje se ha trasladado según un vector que tiene la mitad de longitud que este.*	Recapitulación.
Cristina	*No lo entiendo porque… María había dicho que era la mediatriz entre los dos puntos homólogos ¿no?*	Complemento de la explicación
María Q	*La mediatriz es el punto medio.*	

	Ya, ya lo sé, pero por qué pasa por ese punto medio. (Se refiere al punto medio del vector)	
María Q.	*Imagínate, la figura se desplaza según el vector. Pues el eje, en vez de desplazarse lo que indica el vector, se desplaza la mitad.* *Respecto al eje hago una simetría primero y luego aplicamos un vector que es la simetría deslizante.*	
Cristina	*Sí*	
María Q.	*Entonces quieres averiguar entre la figura original y la que tienes después cuál es el eje que no es el de antes. Pues el eje es el eje de antes, aplicándole el vector que le hemos aplicado a la figura pero en vez del vector entero, la mitad.*	
Profesora	*Al eje le hemos aplicado una traslación de un vector que llega como hasta aquí. Le hemos trasladado la mitad del vector grande porque como aquí hace un efecto espejo* (gestos con las manos)*… es como si la mitad quedara para acá y la mitad quedara para allá*	
Cristina	*Pero es que no…*	
María Q	Se levanta y se lo explica a Cristina en un folio.	
Profesora	*Entonces, si sale traslación y simetría no siempre es una simetría deslizante. Hay un caso en el que no ¿y cuál es este caso?*	
Tamara	*Cuando el vector es perpendicular al eje.*	
Profesora	*¿Y cómo se transforma el eje de simetría?*	
Tamara	*Se traslada*	
Profesora	*Se traslada porque es paralelo y se traslada una distancia que es la mitad del módulo del vector que teníamos al principio.* (Escribe en la pizarra) *Se puede decir que se traslada por un vector que tiene la misma dirección y el mismo sentido que el vector anterior pero la mitad del módulo.*	

	¿Y si el vector no es perpendicular?... Tenemos entonces una simetría deslizante.	



Oportunidades de aprendizaje.

Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos.

- *Aprender que la composición de una simetría y una traslación con vector de traslación perpendicular al eje de simetría es una simetría donde el eje es paralelo al inicial:* Utilizando un polígono genérico y un eje de simetría vertical (por petición de una alumna en el episodio anterior) los alumnos tienen la oportunidad de comprobar que la composición de estos dos movimientos es una nueva simetría donde el eje de simetría es paralelo al primero.
- *Aprender que la composición de una simetría y una traslación con vector de traslación perpendicular al eje de simetría es una simetría donde el eje se traslada según un vector de módulo la mitad que el inicial:* Se provoca para que los alumnos recapaciten sobre este hecho.

Oportunidades orientadas a diferentes estrategias.

- *Aprender a argumentar empíricamente, utilizando el arrastre.* Para llegar a un acuerdo sobre las propiedades que se cuestionan se hace necesario utilizar el arrastre. Así, se comprueba visualmente que las propiedades geométricas, que intuitivamente se deducen, se pueden generalizar siempre que el vector de traslación sea perpendicular al eje de simetría.

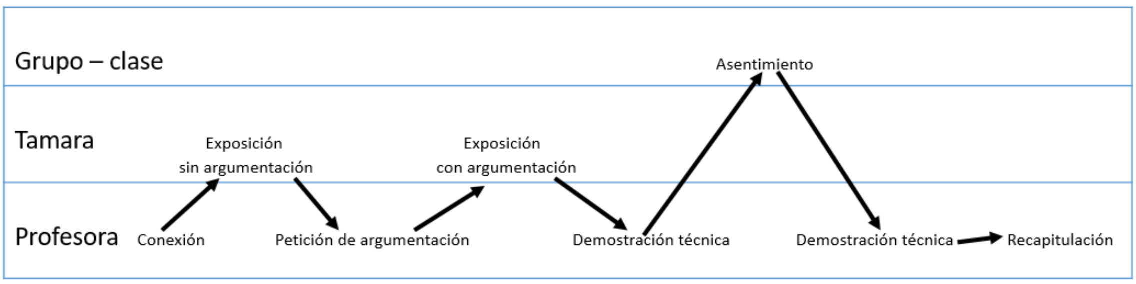
Oportunidades orientadas a autorregulación

- *Aprender la importancia de plantear dudas:* Después de que la profesora haya hecho la recapitulación de los resultados obtenidos no se continúa inmediatamente. En este episodio, Cristina no se conforma con la demostración técnica. Al plantear las dudas que le genera es ejemplo para sus compañeros.

Episodio 10 (e_{10}): La composición de simetría y traslación no es conmutativa, pero genera un movimiento rígido con el mismo nombre

Participante	**Intervención**	**Interpretación**
Profesora	*Ahora lo que os he preguntado antes, ¿y si aplico traslación y simetría, al contrario? ¿Será también simetría deslizante?*	Conexión
Tamara	*Pasa lo mismo*	Exposición con argumentación
Profesora	*Vamos a comprobarlo.* *Lo vemos con una imagen general que va a ser otra vez una de las que utilizamos el otro día. Voy a aplicar, en lugar de simetría y traslación, traslación y simetría. Cojo un vector y un eje, elijo el eje perpendicular porque parece que se ve mejor la simetría.* (No escoge el vector perpendicular al eje de simetría) *… borro el intermedio.* (señala al inicial y al final) *¿este y este son simetría deslizante?*	Demostración técnica.
Tamara	*Sí*	
Profesora	*¿Por qué?*	Petición de argumentación
Tamara	*No tiene puntos fijos y la orientación se invierte.*	Exposición con argumentación
Profesora	*¿Por qué veis que no tiene ningún punto fijo?* *Al desplazarlos* (utiliza el arrastre) *no hay ningún lugar en el que un punto coincida con su imagen.*	

	Entonces la composición de traslación y simetría, en este orden, vuelve a ser una simetría deslizante. *Pero ojo, una cosa a tener en cuenta si yo con el mismo eje y con el mismo vector aplico al contrario… aplico primero la simetría y luego la traslación. ¿Creéis que llego al mismo sitio o llego a otro?* (aplica la simetría) *Si tuviera que llegar al mismo sitio, la traslación por ese vector tendría que llevar a esta figura aquí y me parece a mí que esto no va a ser…* (Lo hace) *Va a aquí. Es una simetría deslizante pero es distinta. O sea, sí que es una simetría deslizante pero no llegamos al mismo sitio. No es conmutativa.* *En este caso he aplicado traslación y simetría y me lleva aquí. En este otro caso he aplicado traslación y simetría y me lleva a aquí. En ambos casos hay simetría deslizante pero no llega al mismo punto. No es conmutativo.* *¿Veis lo que estoy diciendo?*	Demostración técnica
Grupo clase	*Sí*	Asentimiento
Profesora	(Utiliza el arrastre hasta colocar el vector perpendicular al eje). *Si el vector lo colocara así, perpendicular al eje, ambos movimientos serían simetrías pero el eje de simetría en este caso estaría por aquí y en este caso estaría por aquí.* *(…)* (Escribe en la pizarra de tiza) *Escribo aquí como observación: No es conmutativa, aunque es verdad que el nombre del movimiento que genera es el mismo.*	Demostración técnica. Recapitulación



Oportunidades de aprendizaje.

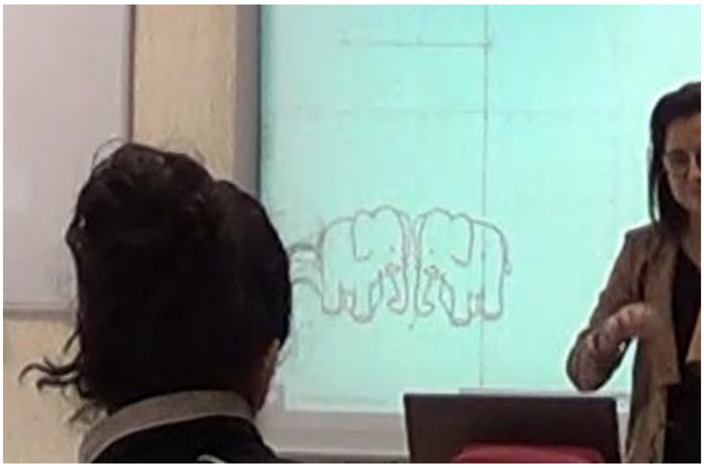
Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos.

- *Aprender que la composición de simetría y traslación no es conmutativa, pero genera un movimiento con el mismo nombre*: El objetivo de este episodio es llegar a esta conclusión mediante demostración técnica.

Oportunidades orientadas a diferentes estrategias.

- *Aprender a argumentar empíricamente, utilizando el arrastre:* Partiendo de casos particulares, utilizando el arrastre se observa que el resultado es general.

En los tres últimos episodios se aprecia una confusión generada porque la simetría resultante de aplicar simetría y traslación (con vector perpendicular al eje de simetría) es una nueva simetría, pero el eje no es el mismo. Algunos alumnos manifiestan la confusión pues ven dibujada una recta que obviamente no es el eje de simetría de los elementos que quedan al eliminar la imagen intermedia de la composición. A continuación, presentamos un diálogo que se genera cuando en la pantalla queda la siguiente imagen.



Participante	**Intervención**
María Q.	*¿Cómo puede ser que el eje de simetría esté dentro del objeto?*
Profesora	*El eje de simetría puede estar dentro del objeto. De hecho, para resolver el problema 1 mucha gente ha puesto el eje de simetría dentro del trapecio, ha hecho simetría y luego ha trasladado.*
María Q	*Entonces, los dos objetos tienen que estar tocando el eje.*

Profesora	*Claro, el eje cruza al original y al simétrico.*
María Q	*Pero el primero no.*

II. Puesta en común del problema 3

Episodio 1 (e_1): Recordatorio del enunciado.

Participante	Intervención	Interpretación
Profesora	*¿Os acordáis de que el problema 3? Era una pintura en la que había dentro movimientos en el plano. Había que buscar sus elementos: vector de traslación, eje de simetría o centro de giro. Entonces el objetivo del problema 3 era el que está aquí en la pantalla: Identificación visual de las isometrías (Acordaos de qué es isometría, "-iso" significa igual y "-metría" medida. Es decir, misma medida: mover un objeto de un lugar a otro manteniendo las medidas) en una representación no dinámica (en el problema 2 la representación de los pupitres era dinámica, si desplazábamos el pupitre original todos los demás se movían, entonces era fácil de encontrar los puntos fijos). Ahora, como no es dinámico lo habéis hecho de otra manera.* *El árbol del problema asociado a este problema 3 partía de "construye los elementos esenciales de cada movimiento" …* (Proyecta en la pizarra digital y recuerda la anticipación a la resolución del problema). *En el problema 4 que es el que veremos después había que hacer la preparación del instrumento didáctico. De manera transversal aparecía el currículo de Educación Primaria.* *Vamos a empezar con el problema 3. Salen dos personas que no hayan salido nunca. He pensado que podrían salir Cristina y Paula.*	Recapitulación. Conexión. Invitación a la participación.

Profesora — Recapitulación (enunciado, objetivo y árbol del problema) → Conexión (con el problema 4) → Invitación a la participación.

Oportunidades de aprendizaje:

Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos

- *Recordar la definición de isometría.* La profesora recuerda que los movimientos rígidos hacen que la figura mantenga las medidas.

Oportunidades orientadas a contenidos didácticos específicos.

- *Recordar qué es el árbol del problema y para qué se utiliza:* En la sesión anterior de discusión en gran grupo ya se había presentado el árbol del problema. Además, se proyecta en el aula de informática durante el trabajo en parejas. En esta ocasión, la profesora proyecta de nuevo el árbol del problema 3, describiendo sus ramas y conecta con el trabajo que han hecho para resolver el problema 4 que es de corte didáctico.

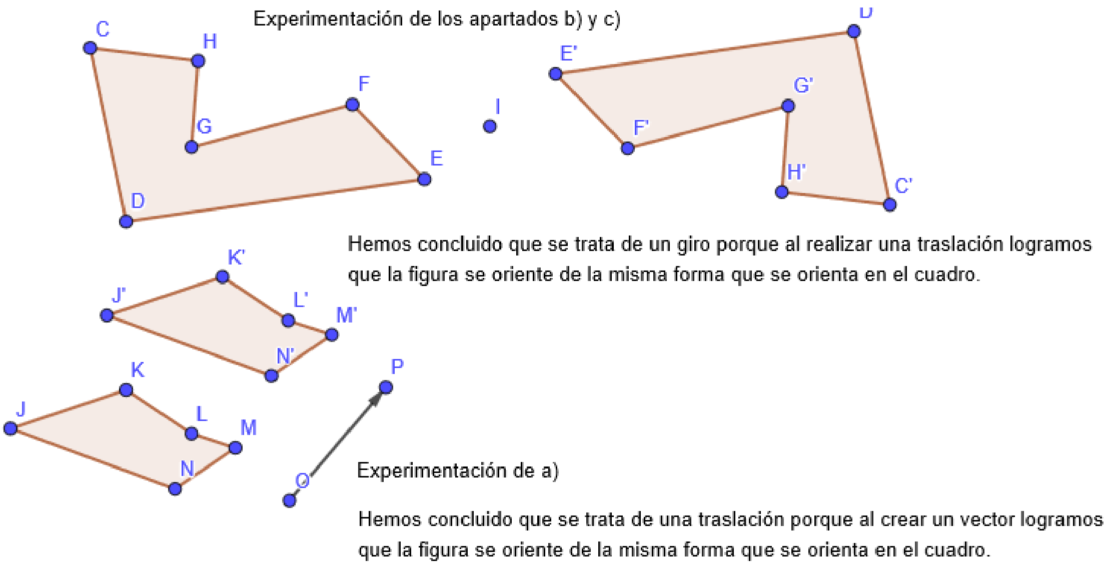
Episodio 2 (e_2): Construcción de polígonos auxiliares para identificar movimientos en la representación no dinámica

Participante	**Intervención**	**Interpretación**
Cristina	*Vale, pues para empezar lo que hicimos fue ver qué movimiento rígido hacía coincidir F con G, F con H y H con G.* *Para hacerlo en vez de verlo aquí directamente, hicimos un…*	Exposición sin argumentación.
Paula	*Polígono*	
Cristina	*Hicimos un polígono e hicimos los movimientos. Y con nuestra imaginación… (*hace gestos con las manos) *lo comparamos con esto.*	
Profesora	*Vale, el polígono que habéis construido se llama polígono auxiliar. El polígono este* (señala en la pizarra) *lo que hace es que marca la silueta del pez. Hay gente que lo hizo, y también es correcto, sin construir polígono auxiliar.*	Uso del vocabulario específico Complemento de la explicación.

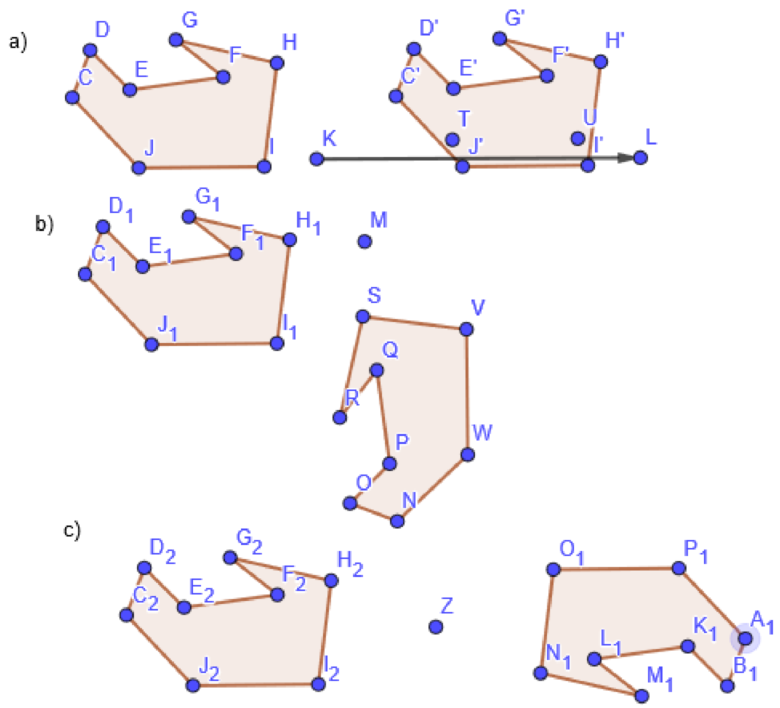
	Amplío la imagen porque desde el fondo no se ve bien.	Obstáculo tecnológico.
Paula	*Construimos el polígono para hacernos una idea de qué teníamos que hacer y luego para comprobar si lo habíamos hecho bien pues lo hicimos en la imagen.*	Exposición sin argumentación.
Paula	*Por aquí teníais alguno dibujado.* (Buscando en la pantalla) ¿Lo borrasteis?	Obstáculo tecnológico.
Cristina	*No, pero lo pusimos en la explicación. a, b y c tenían una respuesta distinta..*	
Se dan cuenta de que el documento que el problema que está abierto no es la solución de la pareja que está en la pizarra. Cierran el documento y abren otro.		
Paula	*Esos son los polígonos auxiliares que habíamos usado para comprobar.*	
Profesora	*¿Y qué veis ahí? Es que realmente a mí no se me había ocurrido construir un polígono fuera. ¿Qué información os da?*	Petición de formalización.
Cristina	*Por ejemplo, para hacer el apartado "a" vemos que hemos hecho aquí un vector. Nosotras nos planteamos que podrían ser varias opciones y al probar los tipos de giro viendo los que podían ser, vimos que era éste. Es cierto que es un poco extraño porque el de arriba nos costaba ver los por los grados.* *Cuando lo pasamos al de la imagen íbamos probando grados aleatorios hasta que nos dio el exacto que cuadraba con la figura de aquí.*	Exposición sin argumentación
Profesora	*A ver, por ejemplo para hacer el apartado a que es una traslación. Cogéis un polígono cualquiera y hacéis una traslación.*	Recapitulación
Cristina y Paula	*Sí*	
Paula	*Probamos las diferentes formas para ver cuál correspondía y vimos que era esta.*	

Profesora	*Vale. Ha habido más gente que ha hecho esto de hacer el dibujo fuera. Alguien de los que lo ha hecho fuera, me puede explicar qué es lo que veis.*	Invitación a la participación. Petición de formalización.
Patricia (desde el sitio)	*Nosotras nada más ver el dibujo, nos resultaba difícil ver cuál era el movimiento que había. ¿Sabes? Porque no nos dábamos cuenta de que era al revés… Sobre todo que no sabíamos que movimiento nos iba a dar ese giro … ¿sabes? Ese giro o… Nosotras por ejemplo utilizamos los polígonos auxiliares… eehh… para ver qué movimiento iba a hacer la figura y cuál nos iba a encajar. Entonces probamos por ejemplo con diferentes simetrías, con la axial, con la del punto… O sea, probamos al principio para ver cuál gira la figura* (hace gesto de cambio de orientación con las manos), *cuál la rotaba* (hace gesto de giro con las manos), *cuál la movía.. ¿sabes?*	Exposición con argumentación.
Profesora	*O sea, que fuera de la figura veis qué hace una traslación. Más o menos qué características tiene una traslación… No sé si es eso o no.*	Recapitulación.
Patricia (desde el sitio)	*Bueno, es como… más en los apartados b y c creo que se ve más claro. Porque nosotras teníamos duda de si era simetría con centro o si era lo de los grados…*	Exposición con argumentación.
Cristina	*Un giro*	
Patricia (desde el sitio)	*Un giro por un punto. Entonces como nos parecía que las características eran parecidas probamos para ver cuál era la que nos daba la figura exactamente igual. Entonces ya asumimos que era el giro.*	Uso del vocabulario específico.
Patricia (desde el sitio)	*Vale. ¿Los demás habéis entendido cuál es la información que aporta?* (No hay respuesta) *Gracias Patricia*	Validación

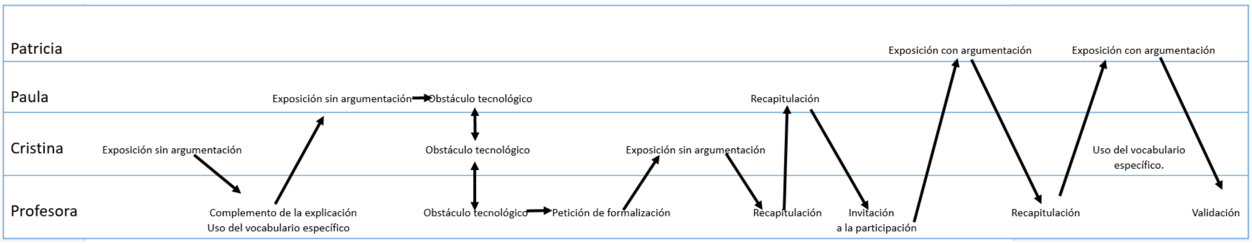
Patricia	*De nada.*	



Figuras auxiliares que construyen en GeoGebra la pareja que hace el trabajo del "sherpa".



Figuras auxiliares que construyen Patricia y su pareja (Patricia interviene desde el sitio).



Oportunidades de aprendizaje.

Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos

- *Recordar las características de traslación, giro y simetría*. De nuevo, en este problema se vuelven a recordar las características de algunos movimientos rígidos y los elementos que lo definen. En este caso se recuerda traslación, giro y simetría. Además, Paula habla de la simetría respecto a un punto, que trataríamos como un giro de 180º. En el curso anterior lo vieron como un tipo de simetría y en ocasiones siguen considerando esa clasificación.

Oportunidades orientadas a diferentes estrategias

- *Aprender que la construcción de un polígono auxiliar sobre el que se pueda aplicar el dinamismo de GeoGebra ayuda a recordar las características de los distintos movimientos rígidos y es posible extrapolar el razonamiento a un entorno no dinámico*. Las alumnas que intervienen en este episodio han realizado construcciones auxiliares sobre las que han aplicado diferentes movimientos para recordar sus características y poder comprobar si las figuras dadas cumplen cada una de ellas.

Oportunidades orientadas a autorregulación.

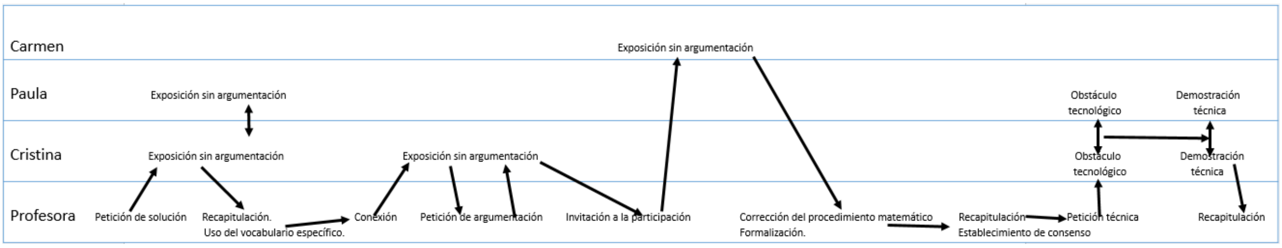
- *Aprender la necesidad de justificar mediante argumentos:* Continuamente se provoca la justificación de la solución.
- *Aprender la necesidad de expresarse con el lenguaje matemático adecuado*: Es la profesora quien dice el nombre formal del “polígono auxiliar”. Cuando Patricia, desde el sitio, expone con argumentación, en

varias ocasiones no utiliza el lenguaje matemático adecuado y es Cristina quien corrige este vocabulario.

Episodio 3 (e_3): Construcción de vector de traslación

Participante	**Intervención**	**Interpretación**
Profesora	*Vamos por partes, como lo pregunta el enunciado. Entonces, ¿F con G decís que es una traslación? ¿Y el vector? ¿Cuál es?*	Petición de solución
Cristina	*El vector es este* (lo señala)	Exposición sin argumentación.
Paula	*O sea, de Q' a Q_1'*	
Profesora	*El caso, de la punta de la aleta a la punta de la aleta del de abajo que son puntos homólogos. Se llaman puntos homólogos cuando son el mismo punto y su imagen.* *¿Qué hubiera pasado si en vez de esos dos, hubiéramos unido este y este?* (señala otros dos puntos homólogos) *¿También vale como vector de traslación?*	Recapitulación Uso del vocabulario específico Conexión.
Cristina	*Yo creo que sí*	Exposición sin argumentación
Profesora	*¿Es distinto al que habéis dibujado vosotras?*	Petición de argumentación
Cristina	*Eehm… a mí me parece un vector distinto*	Exposición sin argumentación
Profesora	*A ver, los que estáis sentados ¿es el mismo vector o es distinto?*	Invitación a la participación.
Carmen (desde el sitio)	*Es el mismo*	Exposición sin argumentación.
Profesora	*¿Tiene el mismo módulo, es decir, la misma longitud? (Hace gesto de longitud con los brazos)*	
Paula	*Bueno, igual sí.*	

Cristina	*Sí. Claro como además está a la misma distancia, sí es igual.*	Corrección de procedimiento matemático
Profesora	*Vale, todos los puntos están a la misma distancia de su homólogo.* *¿Tiene la misma dirección?*	
Cristina y Paula	*Sí*	
Profesora	*Todas las rectas paralelas tienen la misma dirección.*	Formalización.
Cristina	*Pues sí*	
Profesora	*¿Y tiene el mismo sentido?*	
Cristina	*Sí*	
Profesora	*Este vector va para abajo y el otro hubiera ido para abajo también. El sentido lo indica la punta de flecha. Pues si tiene el mismo módulo, dirección y sentido es el mismo pero colocado en otro lado.* *Vamos a hacer el vector que os he dicho yo. De este punto a este* (lo señala) *y vamos a ver si lleva la figura inicial a la misma imagen*.	Recapitulación Establecimiento de consenso. Petición técnica.
Cristina y Paula	Lo intentan hacer pero se encuentran con dificultades técnicas.	Obstáculo tecnológico.
Profesora	*A ver, primero tenéis que construir el vector. Ahí está el vector* (señala el botón de GeoGebra para la construcción de un vector).	
Cristina y Paula	Lo construyen y hacen la traslación. Ven que coincide.	Demostración técnica.
Profesora	*Entonces, conclusión de F a G se ha hecho una traslación y el vector se puede construir uniendo puntos homólogos.*	Recapitulación



Oportunidades de aprendizaje

Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos

- *Repasar los elementos que definen un vector*: Y se había repasado con anterioridad en la discusión en gran grupo sobre el problema 2, en los episodios e_5 y e_6, como puede leerse en el apartado 6.1.2. del presente capítulo. En esta ocasión hace referencia a las tres características de un vector: módulo, dirección y sentido. Se retoma de nuevo en el episodio 9 de resolución de este problema.
- *Repasar la noción de modulo.* Es la longitud del vector.
- *Repasar la noción dirección.* La profesora afirma que todas las rectas paralelas tienen la misma dirección. Observamos si dos vectores están contenidos en la misma recta o rectas paralelas para asegurar que tienen la misma dirección.
- *Repasar la noción de sentido.* La profesora afirma que lo indica la punta de la flecha.

Oportunidades orientadas a diferentes estrategias

- *Aprender a argumentar empíricamente utilizando los medios técnicos.* Después de haber argumentado verbalmente que dos vectores son iguales se pide la demostración técnica. Las alumnas presentan problemas de instrumentalización de la herramienta y la profesora tiene que ayudar en este proceso. Debido a estas dificultades, se vuelve a retomar la demostración técnica en el episodio 9, en el que otras parejas hacen el trabajo del "sherpa".

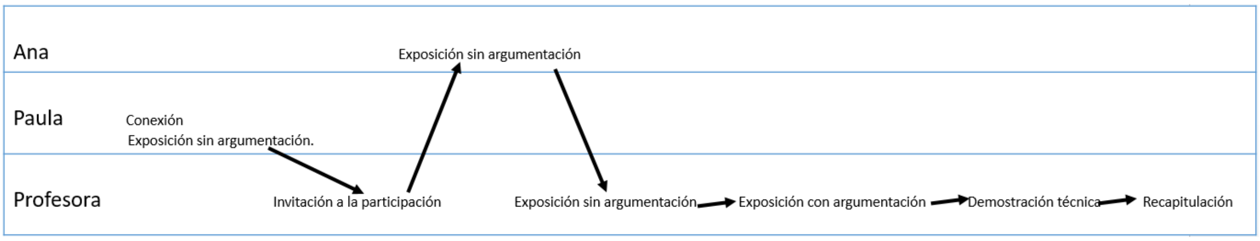
Oportunidades orientadas a autorregulación.

- *Aprender la necesidad de justificar mediante argumentos:* Continuamente se provoca la justificación de la solución.

Episodio 4 (e_4): Ángulo de giro

Participante	Intervención	Interpretación
Profesora	*Apartado b, el movimiento que hace coincidir F con H.*	
Paula	*Hemos puesto los lados y 140º.*	Conexión. Exposición sin argumentación.
Profesora	*¿Estáis todos de acuerdo, si os acordáis de que eran 140º?*	Invitación a la participación.
Ana (desde el sitio)	*A mí me suenan 121º*	Exposición sin argumentación
Profesora	*¿A alguien le suena otra cosa?* *Si lo estamos viendo "a ojo" no es mala aproximación 140º pero es mejor aproximación 121º. Pero realmente, fijaos (se acerca a la pizarra y va señalando lo que dice) que aquí la circunferencia se divide en una, dos tres, cuatro, cinco y seis partes. Al girar este ángulo, estoy girando entonces dos sextos de la circunferencia. Dos sextos de 360º es justamente 120º. ¿Cómo lo puedo ver con GeoGebra?* *No os preocupéis porque esto es extra, no lo pedía el enunciado* (dirigiéndose a las alumnas que están haciendo el trabajo del "sherpa"). *Si yo mido este ángulo con GeoGebra* (utiliza la herramienta medir ángulos) *sale 115º porque no está hecho con exactitud.* *Entonces es 120º y lo puedo ver de dos maneras.*	Invitación a la participación. Exposición sin argumentación. Exposición con argumentación. Demostración técnica. Recapitulación

En este episodio se discute sobre cuál es el ángulo del giro que transforma F en H. El enunciado pide el centro de giro pero no el ángulo. Así, cuando Paula habla sobre el ángulo de giro está haciendo una conexión con otros conceptos matemáticos que no estaban presentes en el enunciado de la actividad y no se contemplaban en el árbol del problema.



Oportunidades de aprendizaje

Oportunidades orientadas a diferentes estrategias

- *Aprender a conjeturar*. Las alumnas que están haciendo el trabajo del "sherpa" dan una medida aproximada del ángulo de giro, mientras que una de las parejas que están sentadas en su sitio tienen una aproximación mejor. Se resalta que ambas conjeturas son buenas, pero es necesario realizar razonamientos o demostraciones empíricas para conocer el ángulo exacto.
- *Aprender a argumentar matemáticamente.* La profesora argumenta primero geométricamente cuál es la amplitud del ángulo, sin necesidad de recurrir a medios técnicos. Con esta argumentación se demuestra formalmente cuál es la amplitud exacta del ángulo. Lo que ofrece a los alumnos la oportunidad de aprender la importancia de justificar matemáticamente.
- *Aprender a argumentar empíricamente utilizando los medios técnicos.* Después de haber argumentado geométricamente cuál es la amplitud del ángulo, la profesora lo demuestra utilizando medios técnicos. Se encuentra con dificultad porque la representación que han hecho las alumnas no es exacta.

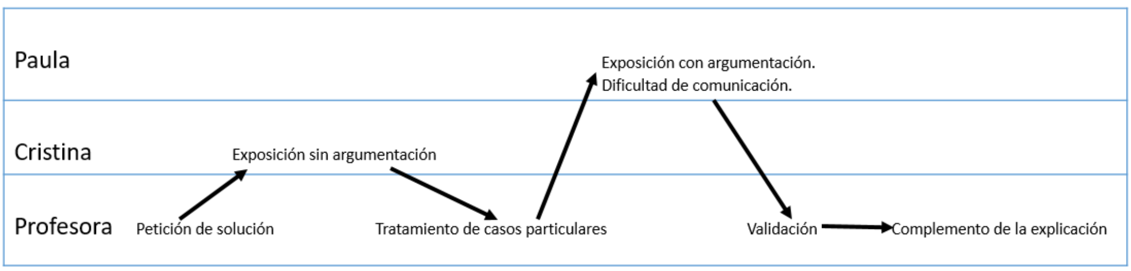
Oportunidades orientadas a autorregulación.

- *Aprender la importancia de hacer conexiones con otras cuestiones*. En este caso, es un miembro de la pareja que hace el trabajo del "sherpa" quien va más allá de lo que plantea el enunciado del problema, sacando el tema del ángulo de giro. La profesora explica este asunto aunque no está contemplado en el árbol del problema, lo cual muestra flexibilidad.

Episodio 5 (e_5): Encontrar centro de giro cuando un punto de la imagen no dinámica coincide con su homólogo.

Participante	**Intervención**	**Interpretación**
Profesora	*¿Cómo habéis encontrado el centro de giro?*	Petición de solución.
Cristina	*Haciendo las mediatrices y el punto donde se cortan es el centro de giro.* (Hace gestos con las manos para acompañar a la explicación)	Exposición sin argumentación.
Profesora	*Este caso concreto tiene una característica muy especial y es que el centro de giro está dentro de la figura.*	Tratamiento de casos particulares
Paula	*Habíamos cogido la cola del pez porque justamente la cola del pez coincidía con la que…* (señala)	Exposición con argumentación. Dificultad de comunicación. *
Profesora	*Claro, si coincide pues eso es un punto fijo. Es el centro de giro.* *No está mal hacer las mediatrices, pero cuando el centro de giro está dentro de la figura es muy obvio y hay grupos que sí que lo han marcado directamente.* (Hace gestos con las manos) *Si una figura gira respecto a un punto que está dentro de la figura, el punto respecto al que gira es fijo. Entonces ese es el centro de giro.*	Validación Complemento a la explicación.

*****En este caso la alumna recurre a señalar porque no tiene las palabras: figura desplazada, la homóloga, la imagen…



Oportunidades de aprendizaje

Orientadas a contenidos matemáticos específicos

- *Recordar un procedimiento general para encontrar el centro de giro*. Como ya tuvieron la oportunidad de aprender los alumnos, en la discusión en gran grupo sobre el problema 2 que se desarrolla en el apartado 6.1.2, el centro de giro es la intersección de las mediatrices de los segmentos que unen puntos homólogos. Cristina lo recuerda al principio de este episodio.
- *Recordar un procedimiento particular para encontrar el centro de giro*. Cuando se ha aplicado un giro y un punto coincide con su homólogo, ese punto es el centro de giro. También, en la puesta en común del problema 2 pudieron aprenderlo ya que utilizando el carácter dinámico del SGD, juntaron un punto con su homólogo para encontrar el centro de giro. En el episodio 10 se vuelve a trabajar sobre este tema.

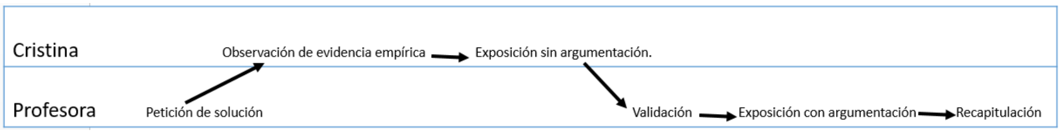
Orientadas a diferentes estrategias

- *Aprender la necesidad de encontrar la estrategia más corta para resolver un ejercicio*: Existen varios procesos que llevan a la resolución del problema planteado en este episodio. Sin embargo, aplicar el procedimiento general resulta muy costoso ya que la solución es trivial.

Episodio 6 (e_6): Ángulo de giro en sentido horario y antihorario.

Participante	**Intervención**	**Interpretación**
Profesora	*Contadme el último apartado*	Petición de solución.
Cristina	*F con G también era un giro.*	Observación de evidencia empírica.
Paula	*Era un giro y aquí también hemos aplicado las mediatrices.*	
Cristina	*Nos salían 240º "a ojo"*	Exposición sin argumentación.

Profesora	*A ver 240 está bien, pero es que es 120 en sentido horario y 240 en sentido antihorario. Es exactamente lo mismo.* *Entended eso, es una conclusión. Si la máxima amplitud posible es 360º. Es lo mismo decir que una figura se mueve de aquí a aquí 90º* (hace gestos con un lápiz que tiene en la mano) *puedo llegar a la misma posición moviéndolo hacia el otro lado todo lo que me queda para llegar a 360º. Pues lo mismo pasa si son 120º.*	Validación. Exposición con argumentación. Recapitulación.



Oportunidades de aprendizaje.

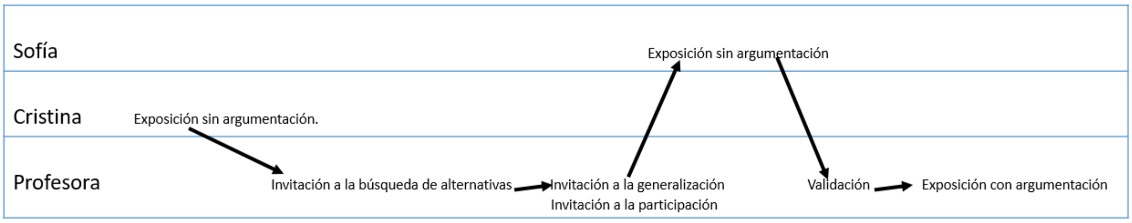
Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos.

- *Revisar la noción de sentido del giro:* En el apartado 6.1.1 ya se revisó la noción de sentido del giro, aquí surge de nuevo la oportunidad de aprender la diferencia entre "sentido horario" o "sentido antihorario". Si damos un ángulo en un sentido, el movimiento hecho en el sentido contrario con amplitud igual a lo que queda para llegar a 360º dará lugar al mismo movimiento rígido.

Episodio 7 (e_7): Encontrar el centro de giro cuando ningún punto de la imagen dinámica coincide con su homólogo.

Participante	**Intervención**	**Interpretación**
Cristina	*Y nada, también hemos hecho lo mismo: mediatrices y hemos encontrado el punto y ya.*	Exposición sin argumentación.
Profesora	*Vale ¿y era necesario hacer las mediatrices de todos los puntos homólogos?*	Invitación a la búsqueda de alternativas.

Cristina	*Hemos hecho de muchos porque queríamos tener seguridad pero en verdad no era necesario.*	
Profesora	*¿Cuántas mediatrices es suficiente? ¿Cuál es lo mínimo?*	Invitación a la generalización. Invitación a la participación.
Sofía (desde el sitio)	*Dos*	Exposición sin argumentación.
Profesora	*Dos porque busco un punto así que tiene que ser una intersección. Con una me quedo corto porque con qué lo interseco… Si solamente hago una mediatriz me quedo corta, necesito dos.*	Validación. Exposición con argumentación.



Oportunidades de aprendizaje

Orientadas a contenidos matemáticos específicos

- *Recordar un procedimiento general para encontrar el centro de giro*. De nuevo, se repasa el procedimiento para encontrar el centro de giro como intersección de las mediatrices que unen puntos homólogos. En esta ocasión se resalta que el número mínimo de mediatrices necesarias es dos. En el episodio 8 volvemos a retomar este contenido.

Orientadas a diferentes estrategias

- *Aprender la necesidad de encontrar la estrategia más corta para resolver un ejercicio*: Se busca cuántas mediatrices como poco son necesarias para poder hallar el centro de giro. Las alumnas afirman que han hecho muchas para asegurar la respuesta.

Episodio 8 (e_8): Composición de giro y traslación es un giro.

Participante	Intervención	Interpretación
Profesora	*Y una cosa, ampliando este caso. Varias personas dijeron en el aula de informática que esto era un giro y una traslación.*	Conexión
Cristina (desde el sitio)	*¿Por qué?*	Petición de argumentación
Profesora	*Porque si muevo H a F y luego F a G estoy haciendo primero un giro y luego una traslación* (Lo señala en la pizarra) *y llego al mismo sitio. Pero cuando me preguntabais esto yo decía que tenía que ser un movimiento de los cuatro que conocemos. Teníamos que elegir entre: traslación, giro, simetría o simetría deslizante. No había más. Entonces, entre estas cómo veo que es un giro sin utilizar auxiliares.* *Pues primero, miro a ver si mantiene o invierte la orientación. Miro si para pasar de aquí a aquí tengo que levantar la figura del papel.* *Luego pienso a ver si puede haber una traslación, si hay un vector que pueda desplazar esta figura de aquí a aquí.* *Hay una pareja que ha escrito "mantiene la orientación pero no puede ser una traslación porque no mantiene la misma posición desplazada". Una traslación es al final un desplazamiento, si esto hubiera quedado así hacia arriba* (lo señala en la pizarra) *podríamos decir que es una traslación y sería fácil de ver e vector.* *Pero en este caso mantiene la orientación y no hay ningún vector con el que pueda hacer "plash"* (señalando) *y moverlo de aquí a aquí.* *En esta ocasión es un giro pero es más difícil de ver porque el centro está fuera de la figura.*	Exposición con argumentación. Petición de solución. Exposición con argumentación. Complemento de la explicación

En este episodio principalmente interviene la profesora, únicamente una persona desde el sitio lanza un "¿por qué?" que hemos interpretado como "petición de argumentación".

Oportunidades de aprendizaje

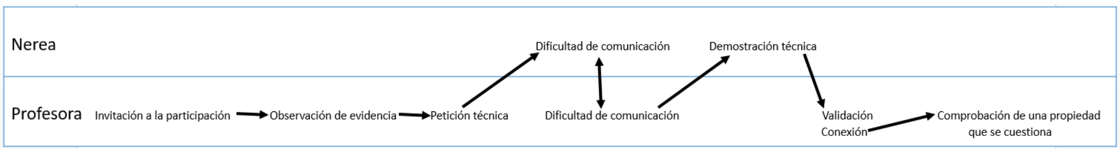
Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos.

- *Revisar la noción de giro:* La profesora recuerda que un giro mantiene la orientación. Además, no se puede encontrar un vector que señale el desplazamiento.
- *Aprender que la composición de giro y traslación genera un giro:* La conexión se establece porque hay parejas que han respondido que el movimiento que hace coincidir estas dos figuras es un giro y luego una traslación. Ya se había dicho anteriormente en la resolución del ejercicio que este movimiento es a la vez un giro.

Episodio 9 (e_9): Conexión

Participante	**Intervención**	**Interpretación**
Profesora	*Voy abrir otro documento, de una pareja a la que le ha quedado todo "más limpio"* (quiere decir que tiene menos líneas en la pantalla. Lo abre y sale una nueva pareja a hacer el trabajo del "sherpa") (Sale otra pareja) *Fijaos que en este caso para construir el vector no han dibujado un polígono rodeando a la figura. Simplemente han marcado un punto de la figura inicial y su homólogo en la imagen. Y este vector de traslación yo lo puedo mover y realmente es el mismo vector.* (Arrastra el vector por la pantalla). *¿De acuerdo con qué es el mismo?*	Invitación a la participación. Observación de evidencia.
Grupo clase	Asentimiento	Asentimiento
Profesora	*¿Qué echo de menos en esta construcción? Me faltaría la comprobación de esto.*	Petición técnica

	Para hacer la comprobación tenéis que hacer un polígono aquí uniendo vértices. Luego le dais a traslación y veremos si coincide con este. ¿Podéis hacerlo vosotras?	
Nerea	*Sí lo hemos demostrado* (señala la pizarra, las figuras H y F)	Dificultad de comunicación.
Profesora	*Lo habéis demostrado para ese caso poniendo puntos pero veo ningún punto en la imagen de la traslación.*	
Nerea	*¿Ponemos todos?*	Demostración técnica.
Profesora	*No todos, con que hagáis unos pocos…*	
Nerea	Construye un polígono en el contorno de la figura y aplica traslación por el vector que han representado.	
Profesora	*Vale.* *Fijaos, lo habían hecho perfecto. Simplemente, faltaba la comprobación. Al hacerlo vemos que efectivamente los dos polígonos coinciden.* *Como teníamos la duda antes de si dos vectores eran iguales o no, yo puedo mover este vector y comprobar que el movimiento sigue siendo el mismo.* *En el momento en el que yo este vector lo cambio de longitud* (arrastra uno de los extremos) *ya no hace el mismo movimiento. Pero para que pase eso tiene que cambiar de longitud, no sirve con que lo cambie de lugar.* *Podría dejarlo con la misma longitud pero mirando para el otro lado, así "para arriba". O con la misma longitud y poniéndolo inclinado. Todo eso sí que varía la posición del a imagen.*	Validación. Conexión. Comprobación de una propiedad que se cuestiona.



Oportunidades de aprendizaje

Las oportunidades de aprendizaje de este episodio están muy relacionadas con las del episodio 4 ya que se podría considerar una continuación de este anterior. En ese episodio debido a dificultades técnicas, inexactitud en la construcción "sobrecarga" de elementos geométricos representados en la solución de la pareja que estaba haciendo el trabajo del "sherpa", la demostración no quedó cerrada.

Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos

- *Repasar los elementos que definen un vector*: Y se había repasado con anterioridad en la discusión en gran grupo sobre el problema 2, en los episodios e_5 y e_6, como puede leerse en el apartado 6.1.2. del presente capítulo. En esta ocasión, como en el episodio 4 de la resolución de este mismo problema, se hace referencia a las tres características de un vector: módulo, dirección y sentido. Se retoma de nuevo en el episodio 9 de resolución de este problema.
- *Repasar la noción de modulo.* Es la longitud del vector.
- *Repasar la noción dirección.* Dejando la misma longitud pero "poniendo el vector inclinado" la imagen cambia.
- *Repasar la noción de sentido.* Se comprueba empíricamente, utilizando medios técnicos que si la flecha "mira para el otro lado" la imagen por el vector no es la misma.

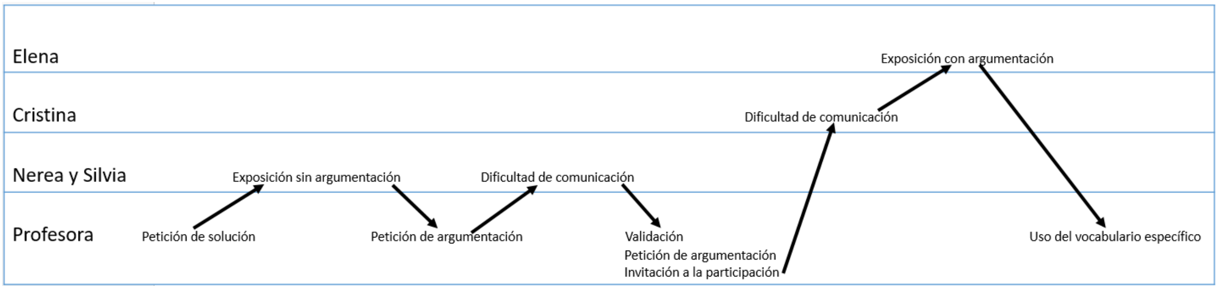
Oportunidades orientadas a diferentes estrategias

- *Aprender a argumentar empíricamente utilizando el arrastre.* Arrastrando el vector por la pantalla, comprobamos que si cambiamos la posición de su representación, la imagen no varía. Arrastrando alguno de sus elementos, modificamos el vector y la imagen cambia. De nuevo se hace consciente a la clase de la posibilidad que brinda el carácter dinámico de GeoGebra.

Episodio 10 (e_{10}): Recordar cómo encontrar centro de giro cuando un punto de la imagen no dinámica coincide con su homólogo.

Participante	Intervención	Interpretación
Profesora	*En el otro qué habéis hecho. En el caso del movimiento que hace coincidir F con H.*	

	(Hay un pequeño barullo en clase) *Escuchamos los que estamos sentados.* *¿Cuál era el centro de giro?*	Petición de solución.
Nerea	Señala	Exposición sin argumentación.
Profesora	*¿Por qué es ese?*	Petición de argumentación.
Nerea	*Porque vimos …* (hace gestos con las manos).	Dificultad de comunicación.
Silvia	*Está aquí.* (Señala también el mismo punto que había señalado Nerea).	
Profesora	*Sí está bien, es ese punto. Pero ¿por qué?* *Lo hemos dicho antes… a ver, los que estáis sentadas que lo habéis escuchado antes.. ¿Por qué?*	Validación Petición de argumentación. Invitación a la participación.
Cristina (desde el sitio)	*Porque lo veíamos a ojo.*	Dificultad de argumentación.
Profesora	*Porque lo veíamos a ojo pero… ¿qué cumple?*	
Cristina (desde el sitio)	*Porque hace así* (gestos con las manos que indican giro y punto fijo)	
Elena (desde el sitio)	*Es un punto homólogo*	Exposición con argumentación.
Profesora	*Es un "punto homólogo común". El punto de esta figura es este y el de la imagen también. Un punto y su homólogo coinciden entonces es un punto fijo. Punto fijo es el centro de giro.*	Uso del vocabulario específico.



Oportunidades de aprendizaje

Las oportunidades de aprendizaje de este episodio están muy relacionadas con las del episodio 6 ya que volvemos a resolver la misma cuestión. El objetivo subyacente en la repetición de este, es ordenar conceptos y brindar una nueva oportunidad a quiénes no los adquirieron en aquella ocasión. Además, se pretende fijar el vocabulario matemático.

Orientadas a contenidos matemáticos específicos

- *Recordar un procedimiento particular para encontrar el centro de giro*. Cuando se ha aplicado un giro y un punto coincide con su homólogo, ese punto es el centro de giro. Los estudiantes ya tuvieron esta oportunidad en la puesta en común del problema 2 y en el episodio 6 de este problema.

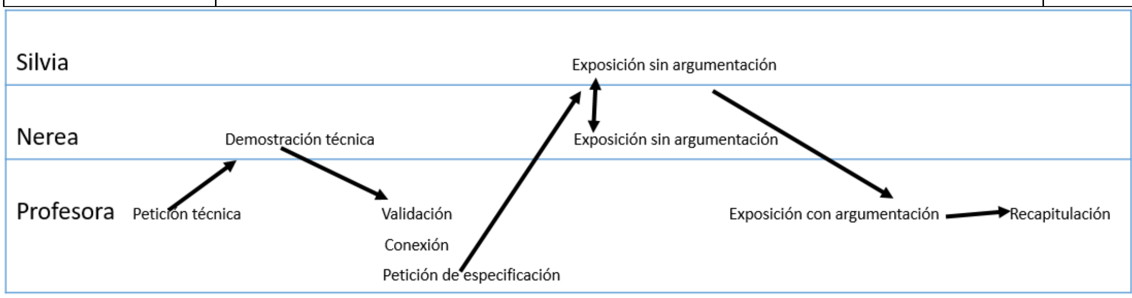
Oportunidades orientadas a autorregulación

- *Aprender la necesidad de expresarse con el lenguaje matemático adecuado*: Intuitivamente, las alumnas son capaces de identificar el centro de giro y explicar con gestos el movimiento que se está realizando. Sin embargo, se fuerza a que aparezca el vocabulario matemático específico, generando de nuevo la oportunidad de aprender la importancia del uso del vocabulario adecuado cuando se dispone de él.

Episodio 11 (e_{11}): Recordar cómo encontrar centro de giro cuando ningún punto de la imagen no dinámica coincide con su homólogo.

Participante	Intervención	Interpretación

Profesora	*Ahora, de este a este* (señala H y G). ¿Qué puntos habéis cogido para hacer mediatrices?	Petición técnica.
Nerea	*E y G… No, estos dos y luego estos dos.* (Señala dos puntos auxiliares que han representado en las figuras homólogas. Al señalar hace corresponder cada punto con su homólogo)	Demostración técnica.
Profesora	*Vale. Al hacer mediatrices descubrís que este es el centro de giro.* (Señala) *¿Este centro de giro lo puedo desplazar igual que al vector?*	Validación. Conexión. Petición de especificación.
Nerea y Silvia	*No*	Exposición sin argumentación.
Profesora	*Vale. No lo puedo desplazar porque es un punto del plano, tiene sus coordenadas…* *Ellas lo han hecho con lo mínimo: dos puntos y sus homólogos, mediatrices y el punto es la intersección. Además, que creo que en GeoGebra lo han marcado como punto intersección* (lo comprueba) *Luego, después podrían haber hecho la comprobación como antes, construyendo el polígono y haciendo el giro.*	Exposición con argumentación. Recapitulación.



Este episodio está muy relacionado con el episodio 8 ya que se podría considerar una continuación de este. En e_8 había "sobrecarga" de elementos geométricos representados en la solución de la pareja que estaba haciendo el trabajo del "sherpa".

Oportunidades de aprendizaje

Orientadas a contenidos matemáticos específicos

- *Recordar un procedimiento general para encontrar el centro de giro*. De nuevo, se repasa el procedimiento para encontrar el centro de giro como intersección de las mediatrices que unen puntos homólogos. En el episodio 8 se había resaltado que el número mínimo de mediatrices necesarias es dos. En esta ocasión, la pareja que hace el trabajo del "sherpa" había utilizado este número de mediatrices.

Episodio 12 (e_{12}): Composición de giro y traslación

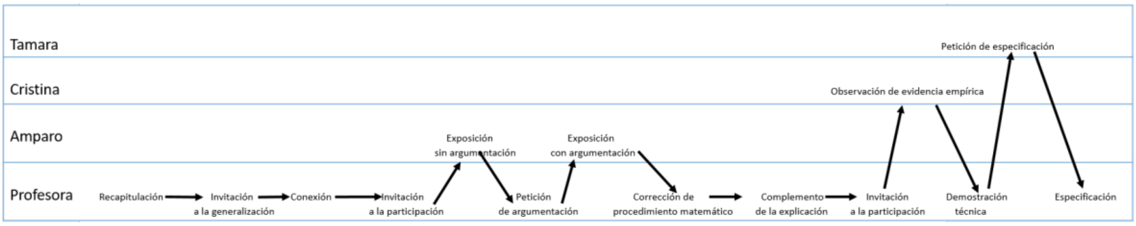
Las alumnas que estaban exponiendo su solución vuelven a su sitio y las que intervienen en este episodio y en el siguiente lo hacen desde el sitio.

Participante	Intervención	Interpretación
Profesora	*Entonces hemos dicho:* *Composición de movimientos… ¿qué hemos visto hasta ahora?* *El otro día empezamos a ver composición de movimientos cuando vimos la composición de una simetría y una traslación que dijimos que podía ser una simetría deslizante o una simetría. Entonces, si sigo con composición de movimientos que es aplicar primero uno y luego otro* (va haciendo un esquema en la pizarra velleda). *Simetría y traslación se llama simetría deslizante en general, pero nos podría dar también una simetría si el vector de traslación es perpendicular al eje.*	Recapitulación
	Ahora estamos viendo aquí (señala en la PDI) *que aquí hay un giro que se podría considerar composición de esta simetría y esta traslación. Porque de H a G puedo pasar haciendo un giro o haciendo un giro y luego una traslación. Entonces, giro más traslación según lo que hemos visto e un giro. Vamos a pensar si esto ocurre siempre y si es conmutativo. Para ello voy a abrir otro GeoGebra distinto.* (Cierra la solución del problema 1 de las alumnas y abre otro GeoGebra). *A una*	Invitación a la generalización.

	figura le voy a aplicar un giro cualquiera de centro un punto aleatorio en el plano y una traslación de un vector cualquiera. He elegido algo que no sea un polígono con intención de que se vea mejor, aunque no sé si lo consigo. El punto es cualquiera porque lo puedo mover libremente por el plano (lo arrastra) *y luego una traslación donde también puedo cambiar si me da la gana porque el vector no está sujeto a nada. Entonces, esta figura que aparece aquí es la que resulta de componer un giro y una traslación. Si oculto esta para que no me estorbe* (oculta la que surge del giro de centro un punto libre) *tengo que ver qué único movimiento que no sea composición de dos hace que esta vaya a aquí. ¿Cómo puedo ver cuál es el único movimiento? Lo hemos dicho antes.* *Fijaos primero en la orientación, si se invierte o se mantiene.*	Conexión. Invitación a la participación.
Amparo	*Se mantiene*	Exposición sin argumentación
Profesora	*¿Por qué?*	Petición de argumentación
Amparo	*Porque la cabeza de la ballena siempre va a estar en el mismo sitio.*	Exposición con argumentación
Profesora	*Vale, pero si yo hubiera aplicado una simetría así aquí hacia este lado. La cabeza también hubiera quedado en "el mismo sitio".* *¿Cómo lo miro?* (señala) *¿Esta es la imagen "especular" de esta? ¿Es reflejado? Eso es ver la orientación…* *¿Yo tengo que levantar esto del plano para poder llegar a aquí?*	Corrección de procedimiento matemático.
Amparo	*No*	
Profesora	*¿Lo puedo arrastrar, ¿no? Sin tener que levantarlo…*	Complemento de la explicación
Silvia	*Sí*	

Profesora	*Esa es la cuestión. No es donde se sitúe la cabeza. La cabeza allí está a la izquierda, aquí está a la izquierda y allí estaría a la izquierda también.* *Y ahora, ¿soy capaz de encontrar un vector de traslación que traslade esto de aquí a aquí?*	Invitación a la participación.
Grupo-clase	(silencio)	
Cristina	*Sí*	
Profesora	*¿Un vector, en línea recta…?* *¿Hay alguna línea recta, un camino recto que lleve esto de aquí a aquí?*	Invitación a la participación.
Cristina	*Sí pero si también hay un giro.*	Observación de evidencia empírica
Profesora	*Claro, entonces no hay ninguna línea recta. Sería una línea curva* (señala la curva que debería recorrer la figura para llegar a la posición final). *No hay un vector, no hay un desplazamiento en línea recta que haga que esto vaya a aquí. Entonces, como mantiene la orientación y no existe vector pues esto tiene que ser un giro.* *Ahora, para encontrar el centro de giro … ¿cómo lo puedo hacer?... pues … mediatrices. Mediatriz entre cada punto y su homólogo* (marca varios puntos y sus homólogos y lo hace). *La intersección de estas mediatrices debe ser el centro de giro… Voy a poner como ángulo de giro el mismo que el del giro de la composición. Como antes había puesto 45º, aquí voy a poner también 45º.* (Aplica el giro) *Queda aproximado porque no he elegido aproximadamente los puntos homólogos para hacer las mediatrices.* *Entonces, composición de un giro y una traslación es un giro* (escribe en la pizarra velleda) *y el ángulo de giro es el mismo.*	Exposición con argumentación Demostración técnica Recapitulación

	La siguiente cosa que tenemos que ver es si esto es conmutativo. Es decir si haciendo traslación y giro llego al mismo lado.	
Tamara	*¿Marta, habíamos hecho primero traslación y luego giro?*	Petición de especificación
Profesora	*No. Lo que hemos hecho ha sido primero giro y luego traslación.*	Especificación



Oportunidades de aprendizaje.

Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos.

- *Recordar que la composición de simetría y traslación, de vector no perpendicular al eje de simetría genera una simetría deslizante. Aunque estos movimientos no sean conmutativos, traslación y simetría también generan simetría deslizante.* En la discusión del problema 1 se concluyó este hecho que aquí se recuerda.
- *Recordar que, si el eje de simetría es perpendicular al vector de traslación, la composición de simetría y traslación es simetría.* También en la discusión del problema 1 los alumnos tuvieron la oportunidad de adquirir este aprendizaje que aquí se recuerda.
- *Recordar las características de un giro.* Se recuerda que el giro es un movimiento que mantiene la orientación. Sus elementos son el centro de giro y el ángulo de giro.
- *Aprender que la composición de giro y traslación genera un giro.* El objetivo principal de este segmento es llegar a esta conclusión. Además, se observa que el ángulo del giro generado por la composición es igual que el ángulo del giro inicial.

Oportunidades orientadas a diferentes estrategias.

- *Aprender a argumentar utilizando procedimientos matemáticos y geométricos.* En este episodio la profesora razona lógicamente, recordando las características de un giro y mediante construcciones geométricas, encontrando el giro haciendo mediatrices.

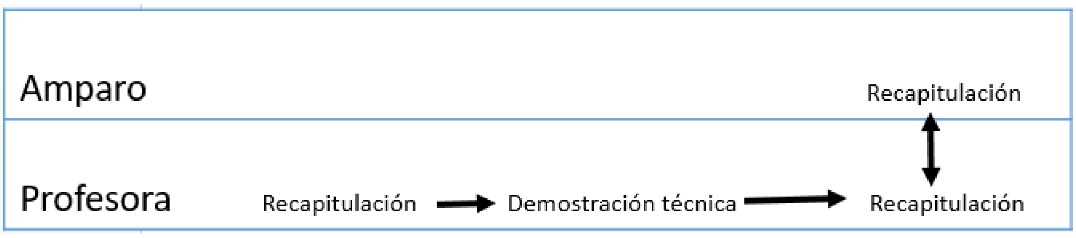
Oportunidades orientadas a autorregulación

- *Aprender la importancia de participar en clase.* La profesora invita a la participación en varias ocasiones.

Episodio 13 (e_{13}): Composición de traslación y giro

Participante	**Intervención**	**Interpretación**
Profesora	*Ahora voy a hacer lo contrario que es primero traslación y luego giro. Por un lado, queremos comprobar si es conmutativo, es decir si lleva exactamente al mismo lugar y luego si vuelve a ser un giro también en este caso.* (Utiliza el giro y el vector de traslación que había utilizado anteriormente) *Entonces, el girado trasladado era este de aquí* (lo señala). *Ahora dibujo el trasladado girado … No coinciden en el mismo sitio. Por ello, concluyo que no es conmutativo pero al no tener que levantar la figura del papel y no existir ningún vector de traslación es también un giro. No voy al mismo lugar, aunque aplique el mismo giro con el mismo ángulo y la misma traslación con el mismo vector. Sí que es un giro.* *Concluyo que no es conmutativo y que origina también un giro. Además, el ángulo de giro vuelve a ser el mismo 45º. Fijaos que de esta figura a esta si podemos llegar con una traslación. Eso significa que el ángulo de giro de ambas es 45º.* *¿Hay dudas? También podríamos componer una giro con una simetría, dos simetrías, dos giros….*	Recapitulación Demostración técnica Recapitulación
Amparo	*No es conmutativo… ¿Por qué?*	

Profesora	*No llegamos al mismo lugar.*	Recapitulación
Amparo	*¿Y la otra parte que decías que sí?*	
Profesora	*Pero sí que sigue siendo un giro.* *Vuelve a ser un giro pero aunque yo aplique el mismo giro y la misma traslación, si lo hago en otro orden no lleva la figura al mismo sitio.*	
Amparo	*Gracias*	
Marta	*De nada. ¿Hay más dudas?*	



Oportunidades de aprendizaje.

Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos.

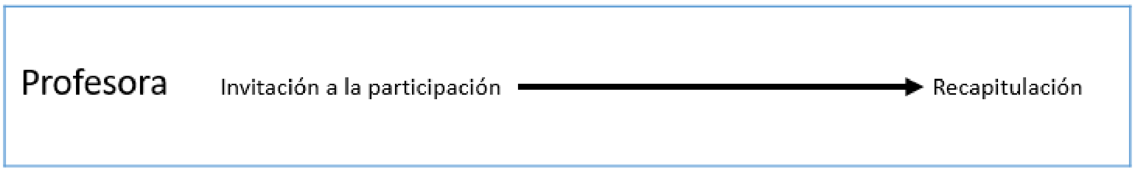
- *Aprender que giro y traslación no son movimientos conmutativos pero su composición en un orden u otro genera un nuevo giro.* El objetivo de este episodio es llegar a la demostración visual de este hecho.
- *Recordar las características de un giro.* De nuevo se hace necesario revisar las características de un giro y los elementos que son necesarios para aplicarlo.

III. Puesta en común del problema 4

Episodio 1 (e1): Recordatorio del enunciado

Participante	Intervención	Interpretación
Profesora	*Vale, vamos a hacer el problema 4. Tengo aquí los documentos Word y los árboles del problema.* *¿Puedes salir María, por favor?*	

	Abro tu Word y cuéntanos qué has hecho. Luego abrimos tu árbol del problema. *El problema 4 era el que tenía características didácticas. Había que inventar un árbol del problema y luego el problema asociado. Para el problema inventado había que buscar en el Decreto Currículo de la Comunidad de Madrid el motivo por el cual iba asociado al curso. Luego teníais que rellenar una rúbrica de evaluación que estaba en la parte de debajo del documento. Ha habido una pareja que se ha saltado esa parte.*	Invitación a la participación Recapitulación



Oportunidades de aprendizaje.

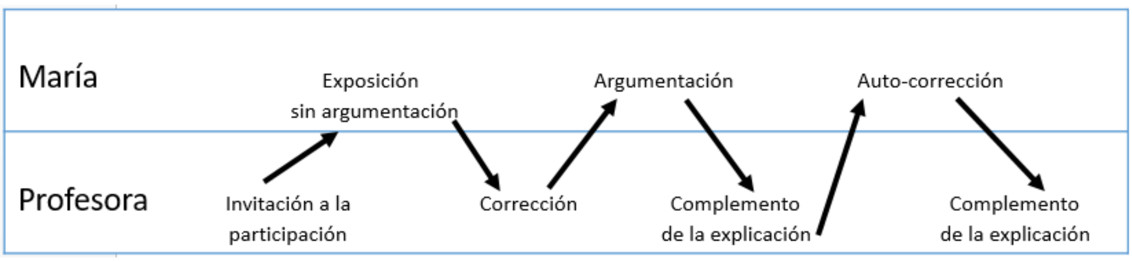
Desde un punto de vista interpretativo y tras examinar el esquema del episodio, no observamos ninguna oportunidad de aprendizaje, ya que simplemente está situando a los alumnos para iniciar la puesta en común e invitando a una alumna a realizar el trabajo del "sherpa".

Episodio 2 (e_2): Enunciado y análisis de los estándares de aprendizaje evaluables presentes

Participante	**Intervención**	**Interpretación**
Profesora	*Vale. Cuéntanos María.*	Invitación a la participación
María	*Pues yo el curso que elegí fue 2º de Primaria.* *El enunciado es: Individualmente con las figuras dadas deberéis crear la casa de vuestros sueños ¡qué viva la creatividad!*	Exposición sin argumentación.

	Posteriormente deberéis identificar los polígonos utilizados en vuestra construcción, indicando el nombre, ayudándoos por el número de lados y vértices.	
Profesora	*Vale, acordaos del applet que era. Lo vamos a abrir.* (Lo abre). *Con estas piezas debíamos inventar una actividad.* *Chicos… shh*	
María	*Seleccione del currículo los contenidos y estándares de aprendizaje que están en el currículo.*	
Profesora	*Vale, señalabas el número 33 de segundo de primaria – "Indica con precisión (subir/bajar, girar a la derecha/izquierda…) la forma de llegar de un lugar a otro en las dependencias escolares" – pero como te he explicado en el comentario del propio documento, no lo pides explícitamente en el enunciado.*	Corrección Argumentación
María	*Sí está*	
Profesora	*No está. Para que estuviera tendrías que pedir: "Indica la forma de llegar…"* *El que sí que sí está presente es el 36 "Reconoce, entre una serie de figuras, las que son polígonos y los nombra según su número de lados" porque lo pides explícitamente.*	Complemento de la explicación.
María	*Vale.*	Auto-corrección
Profesora	*No se puede considerar que el otro está porque tienen que mover derecha e izquierda. El problema que veo es que cualquier persona que no sepa lo que es derecha e izquierda puede resolver esto perfectamente. Hay que pensar si una persona que no supere ese estándar de aprendizaje sería o no capaz de resolver lo que se está planteando.*	Complemento de la explicación
María	*Vale.* *Ahora en la rúbrica…*	

Profesora	*Ojo con la rúbrica.* *Utilizar el applet era una exigencia del guion.* *En cuanto al lenguaje adecuado, no solamente se refiere a que el lenguaje fuera adecuado para niños. Si no que fuera matemáticamente correcto.*	
María	*Está en consonancia con el curso elegido, yo he puesto que sí.*	
Profesora	*Sí porque has podido seleccionar estándares de evaluación.*	
María	*¿Se corresponde con los contenidos del currículo que han sido subrayados? Sí* (con expresión de duda)	
Profesora	*Sí pero faltaba una cuestión más específica para el estándar 33.*	



Oportunidades de aprendizaje.

Oportunidades orientadas a diferentes estrategias

- *Aprender diferentes estrategias para identificar si una actividad evalúa un estándar de aprendizaje.* La profesora otorga varias herramientas para identificar esto, mediante los complementos a la explicación.

Oportunidades orientadas a contenidos didácticos específicos

- *Aprender a identificar si una actividad evalúa un determinado estándar de aprendizaje*. El hecho de que la profesora explique cómo identificar si un estándar de aprendizaje se evalúa con una actividad ofrece la oportunidad de aprender a identificar cuándo ocurre. Además, varias veces, tras intervenciones e la alumna complementa la explicación.

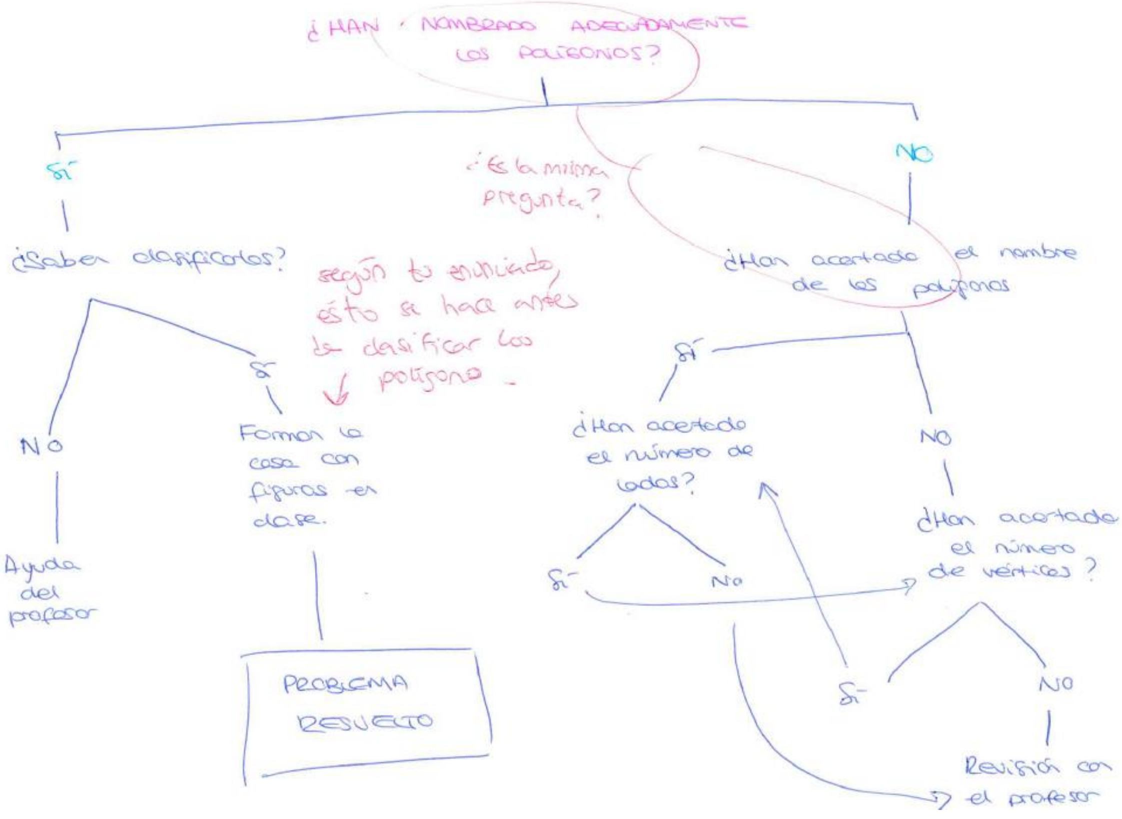
- *Aprender cómo diseñar una actividad que evalúe un determinado estándar de aprendizaje.* Aprendiendo a identificar si una actividad evalúa un determinado aprendizaje, tienen la oportunidad de aprender a diseñar actividades que cumplan los requisitos.

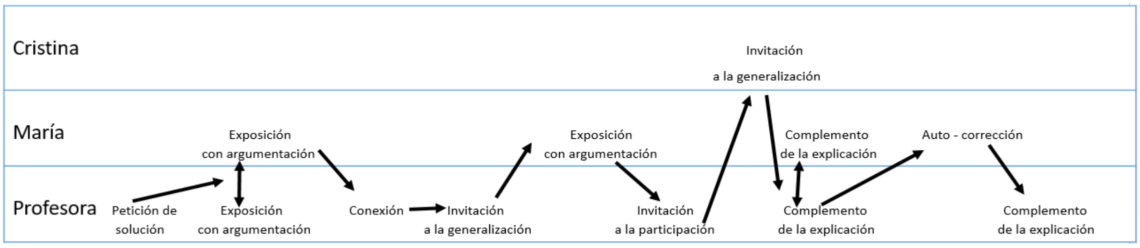
Episodio 3 (e_3): Árbol del problema asociado al primer enunciado

Participante	Intervención	Interpretación
Profesora	*Vale. Tienes abierto el árbol del problema. No se ve súper bien pero nos lo cuentas oral.*	Petición de solución.
María	*Vale, ¿han nombrado adecuadamente los polígonos? Pues la respuesta puede ser sí o puede ser no.* *Cuando es no digo ¿han acertado el nombre de los polígonos?*	Exposición con argumentación.
Profesora	*¿Y eso no es lo mismo que arriba?*	
María	*No porque yo lo entiendo porque a lo mejor dicen es un cuadrado, es un rectángulo…* *En la primera entiendo que han puesto los nombres y en la segunda si se correspondían bien. Porque a lo mejor están mezclados o tal…*	
Profesora	*Vale, entendido así podría ser arriba "¿han dicho los nombres de los polígonos?" y la siguiente "¿han relacionado correctamente los nombres de los polígonos con cada uno de ellos?"*	
María	*Vale y aquí si la respuesta esa sí les preguntábamos si habían acertado el número de lados y si era no si habían acertado el número de vértices. Y si era que no pues pongo revisión del profesor y es quién ve los fallos más detalladamente.*	
Profesora	*Y el sí de una llega al sí de la otra y así sucesivamente. Pero este camino, aun cuando todas las respuestas son sí, no llega al problema resuelto.* *Los caminos tienen que llegar a "problema resuelto".*	Conexión. Invitación a la generalización

María	*Vale y luego era que si la respuesta inicial era que sí preguntaba "¿sabe clasificarlos?"*	Exposición con argumentación.
Profesora	*Con "¿sabe clasificarlos?" a qué te refieres. ¿Es otra vez la misma pregunta que en la derecha?*	
María	*A una tabla en al que tendrían que ponerlos según el número de lados, el número de vértices…* *Si es que no, ayuda del profesor. Si es que sí construyen la casa.*	
Profesora	*Otra cosa, según me dices para ti saber clasificarlo es lo mismo que lo de la derecha porque es decir el número de lados, el número de vértices y qué figura es.* *Pero, aparte de eso, en tu enunciado primero pides que formen la casa y luego clasificar.*	
María	*Lo pensé así pero luego como había que hacer el árbol este dije … pues bueno… pues lo hago así.*	
	Sí, pero debería ir en el orden en el que se plantea, igualmente. *¿Algún comentario? Los que estáis sentados…* *Ojo al árbol del problema que, aunque parezca que esto lo estamos viendo "así" y que no es matemáticas… esto entra, es un instrumento didáctico. Es un flujo lógico que lleva a la solución. Quedaos con las cosas que hemos dicho que se pueden mejorar.*	. Invitación a la participación
Cristina	*¿No sigue un proceso lógico?*	Invitación a la generalización
Profesora	(Se refiere al bucle que se forma cuando la respuesta a las siguientes preguntas es "sí": ¿Han acertado el número de lados? - ¿Han acertado el número de vértices?)	Complemento de la explicación.

	Fijaos que cuando se responde sí aquí, pasamos a este sí y cuando la respuesta a este es sí… volvemos a aquí. Se entra en bucle… no lleva a problema resuelto. Al menos debería llevar a "Forma la casa con figuras en clase". *¿Nos enseñas ahora cómo has completado al rúbrica?*	
María	*Pues en representa un proceso lógico he puesto que sí pero está corregido.*	
Profesora	*Está corregido por esto que acabamos de decir.*	
María	*Luego, tiene en cuenta tanto las respuestas correctas como las incorrectas es que sí.* *Para las respuestas incorrectas incluye preguntas o comentarios para redirigir el proceso de resolución.* *Para las incorrectas incluye preguntas de ampliación…*	
Profesora	*Dices que sí pero no veo cuáles.*	
María	*Pues a lo mejor no.*	Auto - corrección
Profesora	*No se han incluido en este caso.* *Esto no es un fallo grave, ya que un árbol del problema puede no tener preguntas de ampliación, pero estar abierto a incluirlas. Si no lo hubiéramos puesto y hubiéramos puesto ahí un no…*	Complemento de la explicación.
Paula	*Da igual.*	
Profesora	*Bueno, igual no da. Queda más completo si sí lo tiene.*	
María	*Vale, y está abierto a la posibilidad de crear nuevas ramas en distintas intervenciones.*	
Profesora	*Casi siempre está abierto a crear ramas.* *Muchas gracias.* *De tu problema había estado muy bien el enunciado porque era original y claro. Luego el árbol del problema se podía mejorar.*	





Oportunidades de aprendizaje.

Oportunidades orientadas a autorregulación

- *Aprender la importancia de plantear dudas.* Cuando Cristina plantea una duda desencadena un complemento a la explicación que puede provocar que el resto de los compañeros comprendan el proceso lógico que debe seguir un árbol del problema. A la vez, brinda la oportunidad de entender que es fundamental plantear las dudas.

Oportunidades orientadas a contenidos didácticos específicos

- *Recordar qué es el "árbol del problema".* Ya se había presentado esta herramienta con anterioridad. En este episodio los alumnos recuerdan sus características.

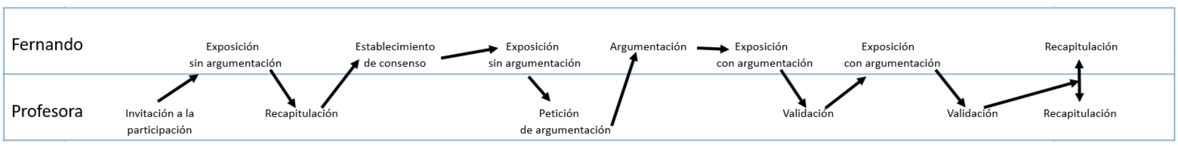
- *Conocer que todas las ramas del árbol deben llevar a la resolución del problema.* En el desarrollo del episodio se da especial importancia que todos los caminos del árbol sirvan para guiar al alumno hacia la resolución del problema.
- *Aprender a realizar una validación de un árbol del problema, utilizando una rúbrica. Los alumnos en el aula de informática completaron una rúbrica para auto-evaluar su propio árbol del problema. Comentar esta rúbrica en este episodio hace que surja la oportunidad de aprender a decidir si cierto árbol del problema dado, es una buena herramienta para la anticipación.*

Episodio 4 (e_4): Segundo enunciado y análisis de los estándares de aprendizaje presentes

Participante	**Intervención**	**Interpretación**
Profesora	*Fernando ¿puedes salir tú a contarnos tu problema 4?*	Invitación a la participación
Fernando	*Sí, lo malo es que no está mi compañero.*	.
Profesora	*Ya pero me gustaría que lo expusieras tú porque habéis hecho un modelo muy diferente.*	
Fernando	*Bueno, el curso que hemos elegido es segundo de primaria también y os leo lo que hemos puesto de enunciado:* *"En el applet se nos presentan siete piezas. Primero, los alumnos van a agrupar los polígonos por número de lados. A continuación, las ordenarán de menor a mayor, realizando giros en los vértices disponibles para que resulten en la misma posición. Despertamos la experimentación cuando les pedimos que formen tres polígonos, uno de cuatro lados, otro de cinco y el último de seis. Tienen que crear polígonos irregulares. Pueden realizar tanto traslación como giro. El reto*	Exposición sin argumentación

	de la actividad viene cuando les pedimos que usen los triángulos para formar cuadrados, intentando usar todos ellos. Para ello, deberán usar ambas técnicas, pus si no sería imposible resolverlo. Por último, como reta final, les pedimos que intenten combinar el cuadrado con otros polígonos para formar un triángulo.	
Profesora	*Es un problema "larguito" tiene varios apartados. Yo me he apuntado aquí lo que creo que son los apartados:* *a) Agrupar según el número de lados.* *b) Ordenar por tamaño realizando giros.* *c) Formar polígonos de cuatro, cinco y seis lados.* *d) Usar los triángulos para formar cuadrados.*	Recapitulación
Fernando	*Exactamente.*	Establecimiento de consenso
Profesora	*O sea, esas cuatro cosas tienen que aparecer en el flujo del árbol del problema luego.*	
Fernando	*Luego aquí… esto es parte del currículo* (muestra lo que han subrayado) *Hemos subrayado ciertas cosas que tienen que ver con lo nuestro. Como… "construcción de triángulos y rectángulos"…*	Exposición sin argumentación
Profesora	*Vale, ¿en qué punto construyen triángulos y rectángulos?*	Petición de argumentación
Fernando	*¿En qué punto?... En el que tienen que mover figuras… para formar cuadrados…*	Argumentación
Profesora	*Vale, de todas maneras no mandáis construir rectángulos.*	
Fernando	*Sí es verdad.* *Luego "reconoce entre figuras las que son polígonos y las nombra según su número de lados". Eso tiene que ver con uno de los apartados que teníamos que era ordenar según el número de lados.*	Exposición con argumentación
Profesora	*Sí*	Validación

Fernando	*“Utiliza con propiedad los conceptos de lado y vértice de un polígono e identifica el número de lados y vértices de un polígono dado.”*	Exposición con argumentación
Profesora	*Tiene que ver también con ese apartado “a”*	
Fernando	*Sí, o incluso con todo.* *Luego, por ejemplo, a la hora de construir los polígonos irregulares ellos tienen que saber cuánto es el número de lados o vértices para ver si está en lo correcto.*	
Profesora	*Vale.*	Validación
Fernando	*Aquí tenemos la rúbrica sobre la corrección de la actividad.*	Recapitulación
Profesora	*¿Cumplís todo?*	
Fernando	*Creemos que sí*	
Profesora	*Utilizáis applet…* *En cuanto al lenguaje adecuado reitero… no es lenguaje adecuado cuando me adapto al niño de segundo. Sino que, por ejemplo, si estoy hablando de cuadrados digo cuadrado y no digo rectángulo o no digo rombo. Y si me quiero referir a rombo digo rombo y no digo cuadrado.* *Se refiere a lenguaje adecuado al nivel, pero también al lenguaje matemático.* *¿Está en consonancia con el curso elegido? Sí.* *¿Se corresponde con los contenidos del curso que han sido subrayados?... Sí.* *Vale, pasamos al árbol del problema.*	



Oportunidades de aprendizaje.

Oportunidades de autorregulación

- *Recordar la necesidad de expresarse en un lenguaje matemático adecuado:* La profesora vuelve a resaltar la importancia de expresarse con un lenguaje matemático adecuado, además de adaptado a los alumnos.

Oportunidades orientadas a contenidos didácticos específicos

- *Aprender cómo identificar si una actividad evalúa un determinado estándar de aprendizaje*. Se argumenta que la actividad evalúa cada uno de los estándares subrayados por los alumnos.
- *Aprender cómo diseñar una actividad que evalúe un determinado estándar de aprendizaje.* Aprendiendo a identificar si una actividad evalúa un determinado aprendizaje, tienen la oportunidad de aprender a diseñar actividades que cumplan los requisitos.

Episodio 5 (e_5): Árbol del problema asociado al segundo enunciado

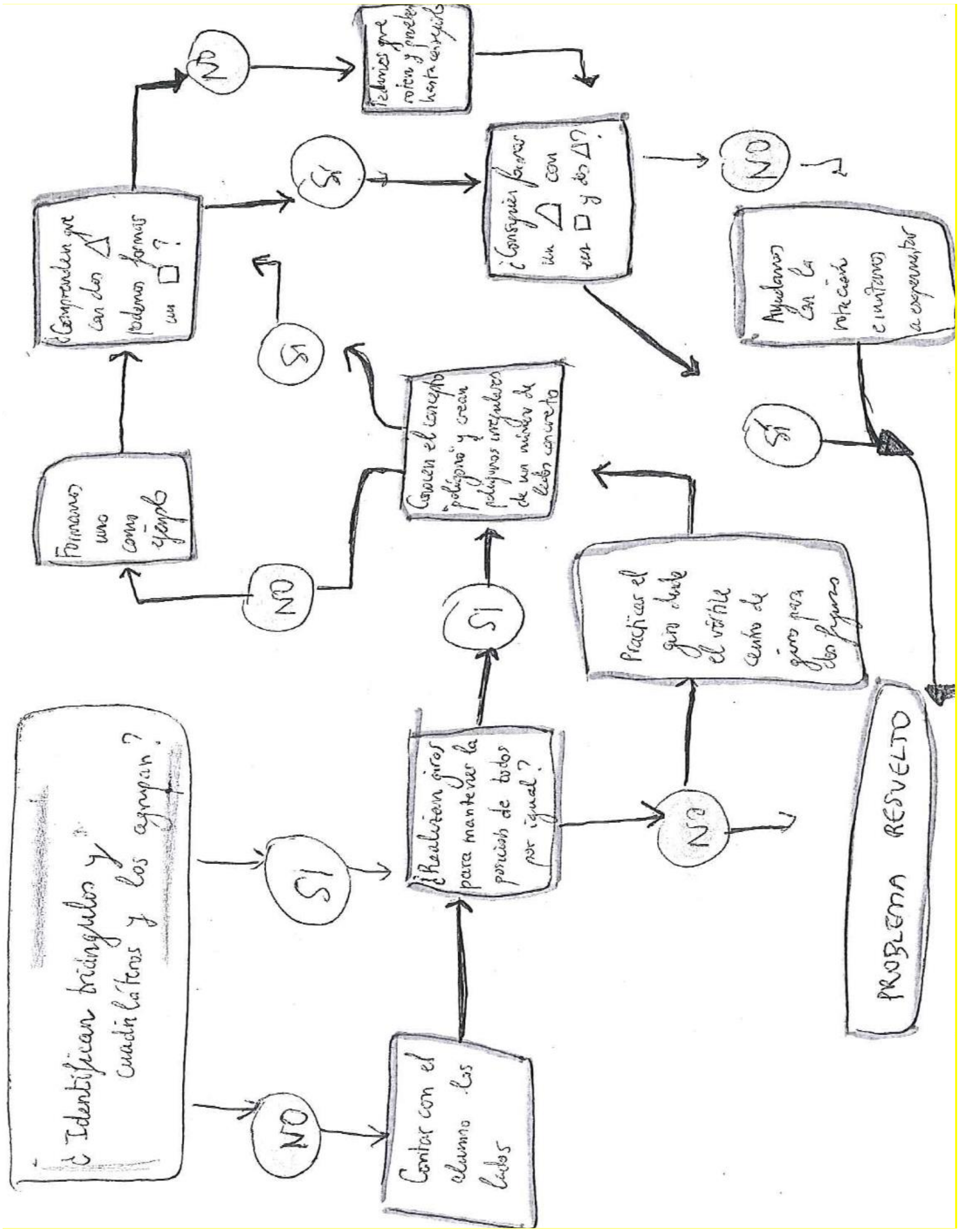
Participante	**Intervención**	**Interpretación**
Profesora	*Vale, pasamos al árbol del problema*	Petición de solución
Fernando	(Abre el documento, pero no se ve completo en la pizarra). *Vale, a ver si puedo hacerlo más pequeño.*	. Obstáculo tecnológico
Profesora	*En el menos de arriba.*	
Fernando	*Bueno pues os voy comentado. También, según lo que pasa. Si sí o si no se va yendo por un camino u otro.* *Lo que pusimos como título o problema en si…*	Exposición con argumentación
Profesora	*A ver, no es un título. Es una primera pregunta. Hay mucha gente que se lo ha tomado como título, incluso hay parejas que han puesto: "¿entiende el concepto del problema?"*	Complemento de la explicación

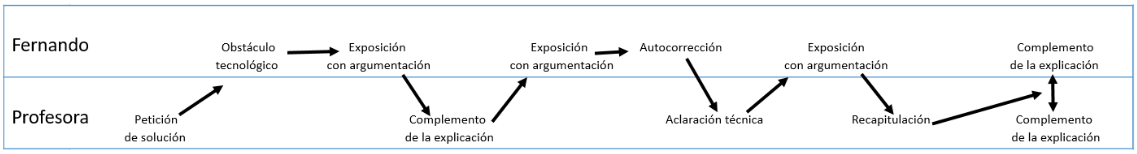
	Primero que concepto es algo de "teoría" y quizás una pregunta más adecuada en ese caso sería "¿entiende el enunciado?". Que podría ser una primera pregunta. *La primera pregunta no tiene por qué ser el final. Es por dónde empiezo a pensar.*	
Fernando	*Pusimos una pregunta en relación a nuestro enunciado: "¿Identifican triángulos y cuadriláteros y los agrupan?"* *Esto hubiera sido resolver la primera parte.* *Si no lo consiguen lo que haríamos sería contar con el alumno los lados. Si lo consigue pasaríamos a la siguiente pregunta: "¿realiza giros para mantener la posición de todos por igual?"* *Aquí eehm… Esta línea sobra porque si es no. No va a problema resuelto…* *Si es no, entonces digamos que practicaríamos con él, el giro desde el vértice.*	Exposición con argumentación Auto-corrección
Profesora	*Vale. Ese problema de todas maneras es de manejo de la herramienta*	Aclaración técnica
Fernando	*Sí, es de manejo de la herramienta.* *Buscaríamos el vértice y haríamos el giro para ver cómo se realiza, tomando como centro el vértice. Si sí lo consiguen pasaríamos a si conocen el concepto de polígono y crean polígonos irregulares con un número de lados concreto. Esto ya sería una de las últimas preguntas que hemos planteado en el enunciado.* *Si no lo consiguen pues formaríamos uno como ejemplo para que ellos vieran desde el applet, pues oye, podemos formarlo de esta manera y tal…* *Si lo consiguen pasaríamos a otra pregunta que… eh…* (no consigue leer bien lo que está escrito) … *bueno aquí*	Exposición con argumentación.

	planteábamos que con qué lados del triángulo podríamos crear un cuadrado.	
Profesora	*Pero ahí estás en la primera frase del enunciado. Ahí hay un poco de….*	Petición indirecta de argumentación
Fernando	*Ya*	Asentimiento
Profesora	*De mezclilla ¿no?* *Habéis saltado de un apartado a otro.*	Petición indirecta de argumentación
	Sí. En este punto sí. *Si no me equivoco, aquí lo que hicimos fue eso, pasar del planteamiento a ver si comprenden qué lados tienen que usar del triángulo. Si no lo consiguen pediremos que roten y prueben hasta conseguirlo.* *Si lo consiguen veríamos si pueden formar un triángulo con un cuadrado y dos triángulos. Si no consiguen esto pues les ayudamos. Es todo el tiempo de ayuda, ayuda…*	Exposición con argumentación.
Profesora	*Claro, para el "no" las ayudas. Para el "sí" el siguiente.*	
Fernando	*Si lo consiguen ya sería el problema resuelto y habríamos respondido a la pregunta… ¿Qué digo?... A todo lo que habíamos planteado.*	
Profesora	*Vale. Excepto por el pequeño lío que hemos visto ahí arriba que no resolvemos eso…* *Fijaos que es un árbol muy distinto al que hemos visto antes. Va siguiendo un camino que está bien, excepto por este fallo de aquí.* *Queremos llegar a problema resuelto pues si sigo los "sí"* (va señalando en la pizarra con el dedo) *voy avanzando en el camino y llego a problema resuelto. Y cuando respondo que no, le propongo una solución para que llegue al "sí".* *Esto es un flujo de pensamiento que me está llevando todo el rato a resolver el problema.*	Recapitulación

	Cuéntanos lo de la rúbrica.	
Fernando	*¿Representa un proceso lógico para resolver el problema planteado? Pues sí… lo hemos visto ahora.* *Luego, ¿tiene en cuenta tanto las respuestas correctas como las incorrectas? Pues pensamos que sí porque si no se consigue buscamos que se consiga por otra vía, ya sea explicando o reforzando… el error… no sé cómo decirlo… reforzando para que se consiga solucionar ese error.* *Luego, la siguiente pregunta "¿para las respuestas incorrectas incluye preguntas o comentarios para redirigir el proceso de resolución?" diría que sí también*	Complemento de la explicación
Profesora	*¿Para las incorrectas?*	
Fernando	*Para las incorrectas, cuando se desvía porque no pueden resolverlo pues sí ofrecemos una estrategia.*	
Profesora	*Sí*	
	Luego ¿para las correctas incluye preguntas de ampliación? Esto… eehm… esto en verdad ahora viéndolo tampoco tanto…	
Grupo-clase	(Risas)	
	A ver, no es un fallo "gordo". Quiero decir, que no incluya preguntas de ampliación, no es tan grave como que no siga un proceso lógico.	
	Y luego, finalmente "¿Está abierto a la posibilidad de crear nuevas ramas en distintas intervenciones?". Pues esto pensamos que sí. Siempre podemos ampliar más de lo que ya hemos ampliado.	
	Vale, ¿sabes lo que puede pasar? Que no lleguen a la solución pero que la ayuda que habéis puesto no sirva de	

	nada… que el problema no sea el que os habéis imaginado sino que sea otro…	
	Claro, para eso se pueden hacer más ramas.	
	Se puede modificar. Pues sí… *Vale. ¿Alguna duda?* *¿Hay alguien que tenga interés en mostrar el suyo?*	Invitación a la participación
Grupo-clase	(Algunos hacen signos de no con la cabeza, otros no responden)	


¿Identifican triángulos y cuadriláteros y los agrupan?
SI
NO
PROBLEMA RESUELTO



Oportunidades orientadas a autorregulación

Oportunidades orientadas a autorregulación

- *Aprender la importancia de la auto-corrección.* En el episodio 8 del problema 1 había aparecido la oportunidad de aprendizaje “Aprender a auto-corregir la solución”. En esta ocasión, el alumno muestra, con su ejemplo, la importancia de la auto-corrección.

Oportunidades orientadas a contenidos didácticos específicos

- *Conocer que todas las ramas del árbol deben llevar a la resolución del problema.* En el desarrollo de este episodio se vuelve a dar especial importancia que todos los caminos del árbol sirvan para guiar al alumno hacia la resolución del problema.
- *Aprender a realizar una validación de un árbol del problema, utilizando una rúbrica.* Durante este episodio se pone en común la rúbrica que ha completado una pareja.

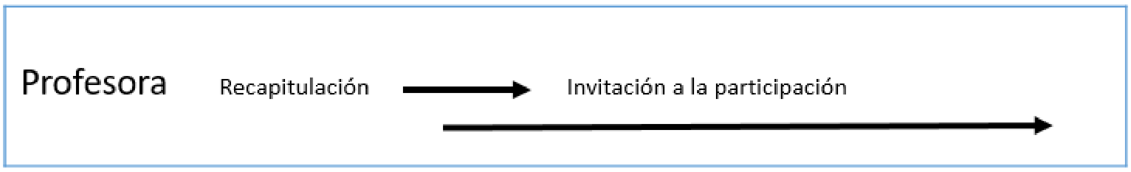
Episodio 6 (e_6): Recapitulación y reflexión

Participante	Intervención	Interpretación
Profesora (Utiliza una presentación en Power Point).	*Cuando nosotros creamos unas actividades pues esperamos unas respuestas por parte de nuestros alumnos. Este instrumento sirve para llevar a cabo una anticipación, pero de una manera sistemática* *Inconscientemente, cuando diseñamos una actividad siempre pensamos cómo la van a resolver, pues esto sistematiza ese proceso. Es una manera de plasmar la anticipación.*	Recapitulación

	Representa el proceso lógico de pensamiento en un diagrama de flujo. Consiste en una estructura esquemática. Lo de forma de "árbol" es una manera de hablar. En la que las distintas ramas recogen las estrategias que el alumno podría seguir para resolver el problema. *¿Sabéis lo que es un algoritmo? Es un proceso que lleva a un final seguro al 100%. Por ejemplo, el de la división, "cogemos dos cifras si no cabe, etc…" aunque no sepa lo que significa dividir si sigo ese algoritmo realizaré una división, el de la suma "lo que me llevo lo pongo aquí, etc…" si me lo aprendo como si fuera un ordenador que programo y le voy diciendo si te pasas de diez añádele uno a la cifra siguiente... Es una cosa que está programada. Esto del árbol del problema no es así, no es un camino cerrado que me va a llevar a la solución sí o sí. No priva de libertad cuando veo que el camino no me llevará a la solución.* *Es un sistema dinámico que se va actualizando cada vez que pongo en práctica la actividad en clase.* *Yo tenía creados unos árboles del problema para cada una de vuestras actividades que me llevaban al proceso lógico. Fijaos en este diseño, me preocupo al crearlo de que sea un camino cerrado. El final tiene que ser "problema resuelto" vaya por la rama que vaya. Este era el árbol del problema 1 que tenía diseñado para vosotros pero fijaos cómo era al principio, cuando lo hizo la otra clase. Con las distintas iteraciones ha ido evolucionando.* *Para el problema 2 y 3 lo mismo, tenía un árbol para cada uno y ha ido evolucionando.* *No debéis aprender de memoria estos árboles pero sí hay que tener claro qué es y cómo se diseña.* *Fijaos que en los objetivos del problema 4 tenemos "Diseñar un instrumento didáctico con las características del instrumento que hemos diseñado nosotros".*	

	Otra cosa que hay que saber son las fases de una discusión en gran grupo que es lo que hemos estado intentando hacer aquí después de cada sesión en el aula de informática. *Hemos situado el problema, siempre decíamos "el problema era este…que tenía estas características y estos eran los objetivos …". Luego hemos presentado una solución que podía ser correcta o no. Muchas veces interesaba que la pareja que saliera aquí no fuera una que lo tenga perfecto de primeras, sino que tuviera fallos que pudiéramos resolver en el transcurso de la clase.* *Estudio de las diferentes estrategias para resolver o argumentar. Estudio de casos particulares o extremos, por ejemplo, cuando hemos hablado de simetría deslizante, un caso particular es que cuando el vector de traslación es perpendicular al eje lo que se genera es una nueva simetría. Se provoca para que estos casos salgan en la discusión.* *Contraste entre diferentes soluciones. Sobre todo en el primer problema, había varias soluciones, pues vimos que esto ocurría.* *Generalización y conclusiones. Siempre deberíamos generalizar y realizar una reflexión sobre el problema.* *Si os parece hacemos ahora una "mini-reflexión" con un papel que os paso en el que vamos a escribir rápido:* - *Lo más importante de lo que hemos visto.* - *Lo que más me ha llamado la atención.* - *Algo que he descubierto y no sabía.* *Se refiere a todo el taller, tanto en el aula de informática como aquí.*	Invitación a la participación
Grupo-Clase	(Sacan papel para hacerlo, se produce un barullo general)	
María	¿Puede ser de la herramienta?	
Profesora	Sí, buena pregunta. Puede ser de la herramienta GeoGebra o de contenido que son las isometrías.	

María	Gracias	



Oportunidades de aprendizaje.

Oportunidades de autorregulación

- *Aprender la importancia de realizar una generalización y una reflexión.* En esta ocasión, se invita a la elaboración por escrito de una reflexión sobre el progreso logrado en la totalidad del taller. Los alumnos tienen la oportunidad de escribir sobre la herramienta tecnológica, las didácticas o contenidos matemáticos.

Oportunidades orientadas a contenidos didácticos específicos

- *Recordar las características del árbol del problema*. La profesora recuerda la definición y características principales del árbol del problema. Muestra ejemplos de los árboles asociados a los tres primeros problemas y su evolución tras las diferentes implementaciones de la secuencia didáctica.
- *Recordar los estadios de una discusión en gran grupo.* La profesora repasa los diferentes estadios y ejemplifica con acciones que han tenido lugar en esta secuencia didáctica de cuatro problemas.

RESUMEN TESIS

El conocimiento para la enseñanza es un foco de atención en auge para la comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas. La ausencia de un conocimiento especializado del contenido matemático hace que los maestros no sepan cómo enfrentar las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas en los niños. Otro problema importante en educación matemática consiste en dilucidar qué tipo de conocimiento didáctico-matemático debería tener un maestro. Al instalarse la noción de competencia en el ámbito de la educación matemática se ha generado un gran impacto en el desarrollo curricular, en la práctica de la enseñanza y en la evaluación. Así, los estudios de grado de Magisterio en Educación Primaria estructuran sus enseñanzas a partir de la adquisición de competencias del alumnado. Entre las competencias que los futuros maestros tienen que adquirir en su formación inicial se encuentran las competencias geométricas básicas y las competencias didáctico-geométricas. Esta necesidad, junto con la intuición de que las discusiones en gran grupo con el uso de un software de geometría dinámica pueden mejorar el aprendizaje de conceptos relacionados con las isometrías y su didáctica, nos ha llevado a realizar esta investigación.

Diversas publicaciones plantean la potencialidad de las discusiones en gran grupo sobre la resolución de problemas matemáticos y muestran ejemplos de puestas en común que favorecen el aprendizaje de los alumnos. Algunos autores han analizado cómo debe ser la estructura de la discusión para que resulte efectiva desde el punto de vista del aprendizaje. Por otro lado, hay investigaciones que se centran en el uso del Software de Geometría como recurso didáctico. Ciertos estudios sobre la formación inicial de maestros sugieren la necesidad de usar entornos interactivos de geometría dinámica para analizar la invariancia como propiedad de las transformaciones geométricas y son varios los autores que afirman que es necesaria una justificación de las construcciones realizadas para asegurarnos de un avance matemático. Además, hay investigaciones educativas sobre la orquestación del profesor en situaciones de clase que involucren el uso de la tecnología. En estas investigaciones se destaca la importancia de una buena anticipación para la gestión adecuada de los diferentes elementos partícipes en cada situación del aula.

Para que las discusiones en gran grupo con tecnología resulten efectivas es imprescindible que el alumno realice progresos fruto del aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje surgidas en el aula. Por este motivo, una parte esencial de esta investigación se centra en el estudio de las oportunidades de aprendizaje que puedan surgir en la situación de enseñanza, así como el aprovechamiento de éstas por parte de los alumnos. Un supuesto básico de este trabajo es considerar el aprovechamiento de una oportunidad de aprendizaje como una evidencia de aprendizaje.

La pregunta que nos hacemos en esta investigación es: *¿Cómo se pueden potenciar las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje de las isometrías en futuros maestros de primaria, mediante la orquestación de discusiones en gran grupo con el uso de la tecnología?* Pretendemos responder por medio de la consecución de los dos objetivos siguientes:

1. Analizar una sistemática de planificación, implementación y evaluación de una secuencia didáctica con discusiones en gran grupo bajo el soporte de GeoGebra.
2. Detectar oportunidades de aprendizaje de las isometrías y de contenidos didácticos específicos, así como su aprovechamiento en el contexto de la secuencia didáctica creada a partir de la sistemática anterior.

El trabajo de campo se ha llevado a cabo en el Centro de Estudios Superiores Don Bosco (adscrito a la Universidad Complutense de Madrid). Los participantes son estudiantes del 4º curso de Grado de Magisterio de Educación Primaria. La investigación tiene lugar en el contexto de la asignatura Matemáticas y su Didáctica III. La profesora es a su vez la investigadora principal. Los datos se recogen a través del análisis de actividades realizadas por parejas y de videograbaciones. La metodología es cualitativa y se encuentra dentro del paradigma "investigación de diseño" ("design research"). Así, hemos planificado secuencias formativas que implican el diseño de tareas, su implementación y un análisis retrospectivo de la experiencia. Tras cada una de las implementaciones, hemos realizado un proceso de reflexión que ha permitido re-adaptar el proceso inicial.

Para conseguir nuestro primer objetivo, una vez finalizada la secuencia didáctica usamos el instrumento TRU-Math (Teaching for Robust Understanding of Mathematics), desarrollado por el Grupo Mat de la Universidad de California en Berkeley (UC) con un sistema de rúbricas que permite medir mediante tres niveles la instrucción de una clase de matemáticas. La aplicación de este instrumento puede dar información de qué aspectos son mejorables para que la secuencia didáctica llegara a ser más productiva.

Nuestro segundo objetivo es detectar oportunidades de aprendizaje, así como su aprovechamiento. Por este motivo, una vez aplicado el instrumento TRU-Math aplicaremos el instrumento 'Detector de oportunidades de aprendizaje' que nos permite realizar un análisis minucioso y en profundidad de las discusiones en gran grupo. Para comprobar si la discusión en gran grupo ha sido realmente productiva buscaremos evidencias de que las oportunidades de aprendizaje detectadas han sido aprovechadas por los estudiantes. Nuestro instrumento para ello son las técnicas de evaluación de la asignatura.

Este estudio ofrece, como aportación didáctica, todo el material creado para la secuencia didáctica y ejemplos de cómo sacar provecho de estas discusiones en gran grupo con tecnología. Si nos fijamos globalmente en los resultados obtenidos, podemos concluir que el diseño y la implementación de la sistemática han sido exitosos desde el punto de vista de la enseñanza pues aplicando el instrumento TRU-MATH se ha evidenciado la valoración positiva en la mayoría de los puntos. Esto se ha debido a la utilización de instrumentos de anticipación y a la orquestación.

Por otro lado, la implementación de la secuencia didáctica ha resultado eficaz desde el punto de vista de las oportunidades de aprendizaje y su aprovechamiento, ya que ha resultado rica en oportunidades de aprendizaje y se ha evidenciado aprovechamiento de alguna de ellas por los alumnos. Las competencias de la guía docente de la asignatura Matemáticas y su Didáctica III están en sintonía con las oportunidades de aprendizaje detectadas. Por ello, podemos concluir que la relación entre la enseñanza y el aprendizaje durante la secuencia es evidente ya que las competencias materializan los objetivos de enseñanza. De esto se desprende que la sistemática promueve la relación entre el aprendizaje y la enseñanza de las isometrías y su didáctica, mediante discusiones en gran grupo con el uso de la tecnología.

Referencias

Amaral, M.E., y Cabrita, I. (2017). Uma abordagem interdisciplinar para a apropiÇao das isometrias. *Campo Abierto*. *Revista de Educación, 36 (1**)**,* 109–136. doi: 10.17398/0213-9529.36.1.109

Arnau Amat, I. S. (2017). Las emociones de los estudiantes de magisterio en relación a los procesos de enseñanza aprendizaje de las ciencias y de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, nº extraordinario,* 2053-2058. Recuperado de https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/336782/427565 [Consulta: 20/01/2021]

Arteaga Martínez, B., Navarro Asencio, E., Fraile Rey, A., y Ramos Alonso, P. (2018). Adaptación de la prueba TIMSS para la evaluación de la competencia matemática en alumnos de magisterio. *Bordón. Revista de Pedagogía*. doi: 10.13042/Bordon.2018.63042

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS Environment: The genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*, 245-274. doi: 10.1023/A:1022103903080

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *34*(3), 66–72. doi: 10.1007/BF02655708

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554

Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). EEUU: Natinal Council of Teachers of Mathematics.

Beltrán-Pellicer, P., Ricart, M., y Estrada, A. (2019). Una experiencia sobre el diseño de juegos como recurso para desarrollar la competencia didáctico-matemática en probabilidad con docentes de infantil y primaria. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portill (Eds.), *Actas Del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*, (pp. 1–10). Recuperado de https://www.ugr.es/~fqm126/civeest/beltran.pdf [Consulta: 20/01/2021].

Bernabeu, M., y Llinares, S. (2016). El desarrollo de una “mirada profesional”: La idea de trayectoria de aprendizaje del pensamiento geométrico. En M. T. Tortosa Ybáñez, S. Grau Company y J. D. Álvarez Teruel (Corrds.), *XIV Jornades de Xarxes d´Investigació en Docència Universitària. Investigació, innovació i ensenyament universitari: enfocaments pluridisciplinaris* (pp.1148-1163). Alacant: Universitat d'Alacant, Institut de Ciències de l'Educació. Recuperado de https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/59130/1/XIV-Jornadas-Redes-ICE_084.pdf [Consulta: 20/01/2021]

Braga, G., Verdeja, M., y Calvo, A. (2018). La Metodología Lesson Study en un Contexto Universitario. Una Experiencia para Mejorar las Prácticas de Aula. *Qualitative Research in Education*, *7*(1), 87–113. doi: 10.17583/qre.2018.3167

Bustos Rubilar, Á. S., y Zubierta Badillo, G. (2019). Desarrollo y cambios en las maneras de justificar matemáticamente de estudiantes cuando trabajan en un ambiente sociocultural. *Enseñanza de las ciencias, 37(3)*, 129–148. doi: 10.5565/rev/ensciencias.2506

Camacho Machín, M., y Santos Trigo, L. M. (2004). La relevancia de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas*. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 58*, 45–60. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/3412/1/Camacho2004LaNumeros58.pdf [Consulta: 20/01/2021]

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. En Ç.M. Behiye Ubuz y A. Mariotti (Eds.). *Procedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2985–2994). Recuperado de http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf [Consulta: 20/01/2021]

Carrillo, J., Flores, E., Climent, N., Contreras, L., Aguilar, A., Escudero, D., Montes, M. (2014) Investigación sobre el profesor de Matemáticas en la Universidad de Huelva (España). En C. Dolores-Flores, M. S. García-González, J. A. Hernández Sánchez y L. Sosa-Guerrero (Eds.), *Matemática educativa: La formación de profesores* (pp. 99-120). Chilpancingo (México) : Ediciones Díaz de Santos

Carrillo, J., y Martín, J. P. (2019). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas como fruto del cambio. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *100*, 147–152. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/14761/1/Carrillo2019El.pdf [Consulta: 20/01/2021]

Climent, N., Montes, M. A., Contreras, L. C., Carrillo, J., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, M., Barrera, V. J., y León, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las Matemáticas a través del análisis de vídeos. *Avances de Investigación En Educación M*atemática, 9, 85–103. doi: 10.35763/aiem.v0i9.108

Cobb, P., Jackson, K., y Dumlap, C. (2016). Design Research: An Analisis and Critique. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.). *Handbook of International Research in Mathematics Education (3rd ed)*. (pp. 481-503). New York: Routledge.

Cobb, P., y Whitenack, J. W. (1996). A method for conducting longitudinal analyses of classroom videorecordings and transcripts. *Educational Studies in Mathematics*, *30*, 213–228. doi: 10.1007/BF00304566

Cobo, P. (1998). *Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Un estudio de casos* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona. Recuperado de https://www.tdx.cat/handle/10803/4716#page=1 [Consulta: 21/01/2021]

Cruz, M. F., y Mantica, A. M. (2017). El uso del software de geometría dinámica en la formulación y validación de conjeturas. *Revista iberoamericana de educación matemática, 51,* 69–82. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2017/51/03.pdf [Consulta: 20/01/2021]

Decreto 89/2014, de 24 de julio (25 de julio de 2014), Decreto por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Primaria. *Boletín Oficial de La Comunidad de Madrid Num.175*, 10–89.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool : instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *75*, 213-234. doi: 10.1007/s10649-010-9254-5

Escher, M.C. (1955) *Symmetry Watercolor 96 Fish.*

Fernández-Bravo, J. A. (2011). La inestabilidad de la normalidad del error en la actividad escolar . ¿ Cuánto de error tienen los errores que cometen los alumnos ?. *Educación y Futuro: Revista de investigación aplicada y experiencias educativas*, *23*, 181–203.

Fernández-Bravo, J. A. (2019). *La sonrisa del conocimiento. Un método para enseñar a aprender y aprender a saber.* Madrid: CCS.

García-Honrado, I., Clemente, F., Venegas, Y., Badillo, E. y Fortuny, J. M. (2018). Análisis de la progresión del aprendizaje de una futura maestra. En J. L. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García, A. Bruno (Eds). *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 231–240). Gijón, España: Universidad de Oviedo. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/13830/1/Garcia-Honrado2018Analisis.pdf [Consulta: 20/01/2021]

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., y Blanco, T. F. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. *Computense educación 29*(4), 1109–1131. doi: 10.5209/RCED.54880

Godino, J.D., Rivas, M., Walter, F.C., y Konic, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Revista electrónica de EducaÇao Matemática 7(2) ,* 1–21. doi: 10.5007/1981-1322.2012v7n2p1

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V., Contreras, A., y Wilhelmi, M. R. (2016). The Theory of Didactical Suitability: Networking a System of Didactics Principles for Mathematics Education from Different Theoretical Perspectives. *Proceedings of the, 13th International Congress on Mathematical Education Hamburg*, 24-31 de Julio, Hamburgo, Alemania: ICME.

González-López, M. J. (2001). La gestión de la clase de matemáticas utilizando sistemas de Geometría Dinámica. En P.Gómez y L.Rico (Eds), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro.* Granada: Editorial Universidad de Granada. Recuperado de https://www.uv.es/aprengeom/archivos2/homenaje/00Indice.PDF [Consulta: 21/01/2021]

González Astudillo, M. T., y Marques Portugal, R. F. (2018). La práctica docente del profesor: La enseñanza de fracciones en un aula de primaria a través de situaciones-problema. *Educatio Siglo XXI*, *36*(3), 177–200. doi: 10.6018/j/349961

González, E., Guillén, G., y Figueras, O. (2007). Diseño de un estudio sobre la puesta en práctica de un modelo de enseñanza para la geometría de los sólidos para la formación continua de profesores de educación básica. En P. Bolea; M. Camacho; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; M.T. González (Eds.) *Investigación en educación Matemática. Comunicación de los grupos de investigación. XI SImposio de la SEIEM* (pp 1-17). Tenerife. Recuperado de https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprengeom/archivos2/GonzalezGuillen07.pdf [Consulta: 20/01/2021]

Gutiérrez-Gutiérrez, A., Gómez, P., y Rico, L. (2016). Conocimiento matemático sobre números y operaciones de los estudiantes de Magisterio. *Educación XXI*, *19(1)*, 135–158. Recuperado de: http://e-spacio.uned.es/fez/eserv/bibliuned:EducacionXXI-2016-19-1-5025/Conocimiento_matematico.pdf

Hernández, E., Vázquez, M.J., y Zurro, M. A. (2012). *Álgebra lineal y Geometría*. Madrid: Pearson.

Hershkowitz, R., y Schwarz, B. (1999). The emergent perspective in rich learning environments: Some roles of tools and activities in the construction of socialmathematical norms. *Educational Studies in Mathematics, 29*, 149–150. doi: 10.1023/A:1003769126987

Hohenwarter, M., Kovács, Z., y Recio, T. (2019). Determinando propiedades geométricas simbólicamente con GeoGebra. *Números. Revista de Didáctica de las matemáticas, 100,* 79–84. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/14720/1/Hohenwarter2019Determinando.pdf [Consulta: 20/01/2021]

Iglesias, M. y Ortiz, J. (2018). Uso del software de Geometría dinámica en la formación inicial de profesores de Matemáticas. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 1(2),* 21-35. Recuperado de:http://mesjournal.es/ojs/index.php/mes/article/view/13 [Consulta: 20/01/2021]

Kieran, C. (2001) The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges. *Educational Studies in Mathematics,* 46, 187–228. doi: 10.1023/A:1014040725558

Lawson, A. E. (2009). The Nature and Development of Scientific Reasoning. A synthetic view*. International Journal of Science and Mathematics Education 2*, 307-338. doi: 10.1007/s10763-004-3224-2

Llinares, S. (2018). Escribir narrativas. De observar a mirar profesionalmente. En J. L. Rodríguez-Muñiz; L. Muñiz-Rodríguez; A. Aguilar-González; P. Alonso; F.J. García; A. Bruno (Eds). *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 39-50). Gijón, España: Universidad de Oviedo. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/13862/1/Llinares2018Escribir.pdf [Consulta: 20/01/2021]

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, (2), 53–70. doi: 10.35763/aiem.v1i2.18

Llinares, S., Valls, J., y Roig, A.I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática*, 20(3), 59-82. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262008000300004 [Consulta: 20/01/2021]

López Rodríguez, J.J. (2013). *Julioprofe* [Blog]. Recuperado de: https://julio-detodounpoco.blogspot.com/2013/05/unidad-12-los-movimientos-en-el-plano-5.html [Consulta: 10/03/2021]

Martín-Nieto, M. (2019). Propuesta Didáctica para la Enseñanza de las Isometrías en Educación Secundaria. *Educación y Futuro: Revista de investigación aplicada y experiencias educativas*, *40,* 15–47.

Martínez Galaz, C. P., & González Weil, C. Ú. (2014). Concepciones del profesorado universitario acerca de la ciencia y su aprendizaje y cómo abordan la promoción de competencias científicas en la formación de futuros profesores de Biología. *Enseñanza de Las Ciencias, 32 (1),* 51-81. doi: 10.5565/rev/ensciencias.852

Mason, J. (1998). Enabling teachers to be Real Teachers: Necessary Levels of Awareness and Structure of attenrtion. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, 243-267. doi: 10.1023/A:1009973717476

Mason, J. (2002) *Researching Your Own Practice. The Disciplined of Noticing* London: Routledge.

Méndez, D., Sánchez-Huete, J. C., y Méndez, M. (2017). Capacidad de razonamiento lógico de los estudiantes del grado de maestro en Educación Infantil y Primaria. *Enseñanza de Las Ciencias, nº extraordinario,* 2149–2154. Recuperado de https://ddd.uab.cat/record/184285?ln=ca [Consulta: 20/01/2021]

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2013). *Estudio internacional sobre* *la formación inicial en Matemáticas de los Maestros.* Instituto Nacional de Evaluación educativa. Recuperado de: https://www.educacionyfp.gob.es/inee/dam/jcr:00934031-3a28-49d1-8c04-73c497d5b363/teds-m-vol2-linea.pdf [Consulta: 28/02/2021]

Molina, M., Castro, E., Molina J. L., y Castro E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de Las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *29*(1), 75–88. Recuperado de https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/243824 [Consulta: 20-01-2021].

Molina, O. (2016). Interacción en un aula de geometría: construcción colectiva y escritura autónoma de una demostración. En E. Soledad, G. Manual, C. Guerrero, A. Mena, J. Mena, E.Montoya, A. Morales, M.Parraguez, E. Ramos, P. Vázquez y D. Zakaryan (Eds.), *XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 117–121). Valparaíso, Chile: SOCHEIEM. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/15023/1/Molina2016Interaccion.pdf [Consulta: 20/01/2021]

Montes, M. A., Contreras, L. C., y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XXI*. (pp. 403–410). Bilbao, España: Universidad del País Vasco. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/12056/1/Montes2014Conocimiento.pdf [Consulta: 20/01/2021]

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y d el aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona. Recuperado de: https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2013/hdl_10803_116213/lmu1de1.pdf [Consulta: 20/01/2021]

Morera, L., Planas, N., y Fortuny, J. M. (2013). Design and Validation of a Tool for the Analysis of Whole Group Discussions in the Mathematics Classroom.

En Ç.M. Behiye Ubuz y A. Mariotti (Eds.). *Procedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1506–1515). Recuperado de http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf [Consulta: 20/01/2021]

Morera, L., Souto, B., y Arteaga, P. (2011) *¿Qué puede hacerse antes de llevar un problema al aula*? Comunicación presentada en las XV Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, Julio de 2011, Gijón (actas de prensa).

Planas, N. (2018). Language as resource: a key notion for understanding the complexity of mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, *98*, 215–229. doi: 10.1007/s10649-018-9810-y

Planas, N., Morgan, C. y Schütte, M. (2018). Mathematics education and language: Lessons and directions from two decades of research. En T.Dreyfus, M.Artigue, D. Potari, S. Prediger y K. Ruthven (Eds.). *Developing Research in Mathematics Education. Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe*, (pp. 196–210). New York: Routledge. doi: 10.4324/9781315113562

Planas, N., y Boukafri, K. (2019). *Construcción de normas generadoras de oportunidades para el aprendizaje matemático* hal-02024105f

Pochulu, M., Font, V., y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, *19*(1), 71–98. doi: 10.12802/RELIME.13.1913

Prediger, S. (2019). Theorizing in Design Research : Methodological reflections on developing and connecting theory elements for language-responsive mathematics classrooms. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, *15*, 5–27. doi: 10.35763/aiem.v0i15.265

Rabardel, P. (2001). Instrument Mediated Activity in Situations. En A. Blandford, J. Vanderdonckt & y. Gray (Eds.), *People and Computers XV – Interactions without Frontiers* (pp. 17-30) London: Springer. doi: 10.1007/978-1-4471-0353-0_2

Rabardel, P. y Beguin, P. (2005). Instrument mediated activity: from subject development to anthropocentric design. *Theoretical Issues in Ergonomics Science,* 6(5), 429-461. doi: 10.1080/14639220500078179

Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero (1 de marzo de 2014), Real Decreto por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín oficial del Estado Num. 42*.

Ricart, M., y Estrada, A. (2017). El conocimiento didáctico-matemático y la competencia profesional de evaluar. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.). *Actas del Segundo Congreso International Virtual Sobre el Enfoque Ontosemiótico Del Conocimiento y La Instrucción Matemáticos.* Recuperado de https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/45307/ricart.pdf?sequence=1&isAllowed=y [Consulta: 20/01/2021]

Ruiz, N. (2012). *Análisis del desarrollo de competencias geométricas y didácticas mediante el software de geometría dinámica GeoGebra en la formación inicial del profesorado de primaria* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Madrid.

Sámuel, M., Vanegas, Y., y Giménez, J. (2018). Caracterización Del Conocimiento Matemático De Futuras Maestras De Educación Infantil. *Bordón. Revista de Pedagogía*, *70*(3) 21-75. doi: 10.13042/bordon.2018.62907

Sánchez-Huete, J. C. y Fernánde-Bravo, J. A. (2003). *La enseñanza de la Matemática. Fundamentos teóricos y bases psicopedagógicas.* Madrid: CCS.

Sánchez-Huete, J. C., Pérez-Bonet, G. Rodríguez-López, A. y Martín-Nieto, M. (2019). Influencia en el razonamiento en ciencias y en matemáticas de las variables comprensión lectora y fluidez lectora en estudiantes universitarios. Estudio comparativo. En J. C. Arboleda Aparicio, M. Joaquín Salamanca López, A. de la Herrán Gascón (Eds.), *Educación, Ciencia, Tecnología e Innovación. Ridectei 2019,* (pp. 498-513). EE.UU.: REDIPE.

Schoenfeld, A. H. (2013). Classroom observations in theory and practice. *ZDM - Mathematics Education*, *45*, 607–621. doi: 10.1007/s11858-012-0483-1

SEIEM (2019). Recuperado de: https://www.seiem.es/org/prospectiva.shtml [Consulta: 28/02/2021]

Sherin, M. G. (2007). The development of teachers' professional vission in video clubs. En R. Godman, R. Pea, B. Barron y S.J. Derry (Eds). *Video research in the learning sciences* (pp. 383-395). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Shulman, L. S. (1986). The Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher 15*(2), 4-15. doi: 10.3102/0013189X015002004

Smith, M. S., y Stein, M. K. (2018). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions*. London: CORWN

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., y Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340. doi: 10.1080/10986060802229675

Suavita, M. A., y Murillo, F. J. (2017). El Impacto de los Imaginarios en la Autoestima de los Estudiantes: A Propósito de unas Matemáticas para la Justicia Social. En J. Murillo (Coord.). *Avances en liderazgo y mejora de la educación: Actas del I Congreso Internacional de Liderazgo y Mejora de la Educación,* (pp. 130–133). Madrid: RILME. Recuperado de https://repositorio.uam.es/handle/10486/679552?show=full [Consulta: 21/01/2021]

Thaqi, X (2009). *Aprender a enseñar transformaciones gométricas en primaria desde una perspectiva cultural* (Tesis doctoral). Universitat de Barcelona. Recuperado de: https://www.tdx.cat/handle/10803/1322#page=1 [Consulta: 25/01/2021]

Thaqi, X., y Gimenez, J. (2016). Geometrical Transformations in the Mathematics Textbooks in Kosovo and Catalonia. *Universal Journal of Educational Research*, *4*(9), 1944–1949. doi: 10.13189/ujer.2016.040903

Thaqi, X., Gimenez, J., y Aljimi, E. (2016). The meaning of isometries as function of a set of points and the process of understanding of geometric transformation. En N.V. Konrad Krainer (Ed.). *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.591-597). Recuperado de https://hal.archives-ouvertes.fr/CERME9/public/CERME9_Proceedings_2015.pdf [Consulta: 21/01/2021]

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of Human/Machine Interactions in Computerized Learning Environments: Guiding Students' Command Process through Instrumental Orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*, 281-307. doi: 10.1007/s10758-004-3468-5

Tyminski, A. M., Zambak, V. S., Drake, C., y Land, T. J. (2014). Using representations, decomposition, and approximations of practices to support prospective elementary mathematics teachers' practice of organizing discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*, 463-468. doi: 10.1007/s10857-013-9261-4

Van Vaerenbergh, S. (2019). Problemas matemáticos, su resolución y dominio afectivo. Diferencias entre alumnos y alumnas del grado de maestro. *Revista INFAD de Psicología, 1*(1), 59–68. Recuperado de http://www.infad.eu/RevistaINFAD/OJS/index.php/IJODAEP/article/view/1377/1179 [Consulta: 21/02/2021]

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches En Didáctique Des Mathématiques, 10(2),* 133-170.

Verillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the sudy of though in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education, 10*(1), 77-101.

Vygotsky, L. S. (1977). *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires: La Pléyade.

Yackel, E, y Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477. doi: 10.2307/749877